Stephan Weiss

Triumphator hoch vier

oder

Die Differenzenmaschine von A. J. Thompson und die Logarithmetica Britannica

Zusammenfassung
In der ersten Hälfte des letzten Jahrhunderts berechnete Alexander John Thompson eine Logarithmentafel mit 20 Stellen. Für seine Arbeiten entwarf er eine Differenzenmaschine, die aus vier handelsüblichen mechanischen Rechenmaschinen zusammengebaut wurde. Im Vorwort zu der Logarithmentafel beschreibt Thompson umfassend und detailliert Methoden der Interpolation sowie unterschiedliche Verfahren zur Berechnung einer solchen Tafel.

Die Logarithmentafel

Im Jahr 1952 brachte das Department of Statistics am University College in London unter der Bezeichnung *Logarithmetica Britannica* eine Logarithmentafel mit zwanzig Stellen heraus (Lit. 10). Bearbeiter der Tafel war Alexander John Thompson, geboren 1885, der schon 1922 mit den Arbeiten daran begonnen hatte. Wie er selbst berichtet entstand das Tafelwerk aus Versuchen ob man ein solches vorteilhaft nur mit Differenzen gerader Ordnung durch

Interpolation erstellen könnte. Zu dieser Zeit arbeitete Thompson in der Abteilung für Statistik des General Register Office in London.
Zwischen 1924 und 1952, mit einer längeren Pause während des Zweiten Weltkrieges, erschienen nacheinander Teile der Tafel als neun Hefte in Pearsons Reihe *Tracts for Computers*[1] . Als alle Teile veröffentlicht waren fasste man sie in dem zweibändigen Tafelwerk zusammen.

Das Erscheinungsjahr 1924 für das erste Heft nahm Thompson zum Anlass an die dreihundertjährige Wiederkehr der Veröffentlichung einer Logarithmentafel von Henry Briggs zu erinnern. Briggs (1561 – 1630) hatte 1624 unter dem Titel *Arithmetica Logarithmica* seine zweite und grosse, wenngleich unvollständige, Tafel veröffentlicht. Sie enthält Logarithmen zur Basis 10 mit vierzehn Stellen Genauigkeit für Numeri von 1 bis 20.000 und 90.000 bis 100.000. Das Fehlende ergänzte der Mathematiker Adriaan Vlacq (1600 – 1667) in der zweiten Ausgabe von 1628. Mit dieser Veröffentlichung standen erstmals die dekadischen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 100.000 auf zehn Stellen zur Verfügung. Mit 20-stelligen Logarithmen für 5-stellige Numeri setzte Thompson einen weiteren markanten Punkt in der Geschichte der Logarithmentafeln[2].

Aus der zeitlichen Verbindung zu Briggs' Werk entsteht ein charakteristisches Merkmal des neuen Werkes. Deshalb ergänzt der Titel *"...Issued by the Department of Statistics, University College, London, to commemorate the Tercentenary of Henry Briggs' publication of the Arithmetica Logarithmica, 1624"* (Bild 1).
Mit einem eigenen lateinischen Namen für sein Werk stellt sich Thompson zu Recht in die Reihe der grossen Tafelrechner auf Höhe des Vorgängers Briggs. Man gewinnt den Eindruck, dass die Gegenüberstellung der beiden Titelseiten, die historische und die moderne, dieser Position einen weiteren Ausdruck geben soll. In Band 1 ist nämlich als Frontispiz die Titelseite von Briggs *Arithmetica Logarithmica* von 1624 dargestellt (Bild 2). In Band 2

---

[1] Zur Reihenfolge des Erscheinens der Teile s. Anh. 1.
Professor Karl Pearson (1857 – 1936), Mathematiker und Biologe. Er war u.a. Herausgeber der Reihe *Tracts for Computers* (London, ab 1919/1920). Dieser Titel bedeutet soviel wie „Abhandlungen für Rechner". Angesprochen sind menschliche Rechner, deren Arbeit im Bereich der numerischen Mathematik mit diesen Beiträgen vereinfacht werden sollte.

[2] Man muss die Titel der Werke gut auseinander halten. Briggs ist nämlich auch der Bearbeiter der *Trigonometria Britannica* (1633), einer Tafel der Winkelfunktionen und ihren Logarithmen.

werden links von der Titelseite zwei Seiten aus Briggs' erstem Werk *Logarithmorum Chilias Prima* von 1617 gezeigt.

PUBLICATIONS OF THE DEPARTMENT OF STATISTICS, UNIVERSITY COLLEGE, LONDON

Issued by the Cambridge University Press, Bentley House, London, N.W.1 and obtainable from any bookseller

TRACTS FOR COMPUTERS

I. **Tables of the Digamma and Trigamma Functions.** By Eleanor Pairman, M.A.

Tables for summing ...

... and Curves of the Asymptotic Regression Type by Stevens's Method. By R. W. Hiorns. *Price 15s. net.*

LOGARITHMETICA BRITANNICA

A standard Table of Logarithms to Twenty Decimal Places. By A. J. Thompson, Ph.D. (commenced in 1922 to commemorate the tercentenary of the publication of Henry Briggs's *Arithmetica Logarithmica*).

The nine separate sections of this Table have now been issued, and the complete work consisting of the logarithms of numbers 10,000–100,000, together with Dr Thompson's General Introduction (98 pp.), is available in two bound volumes.

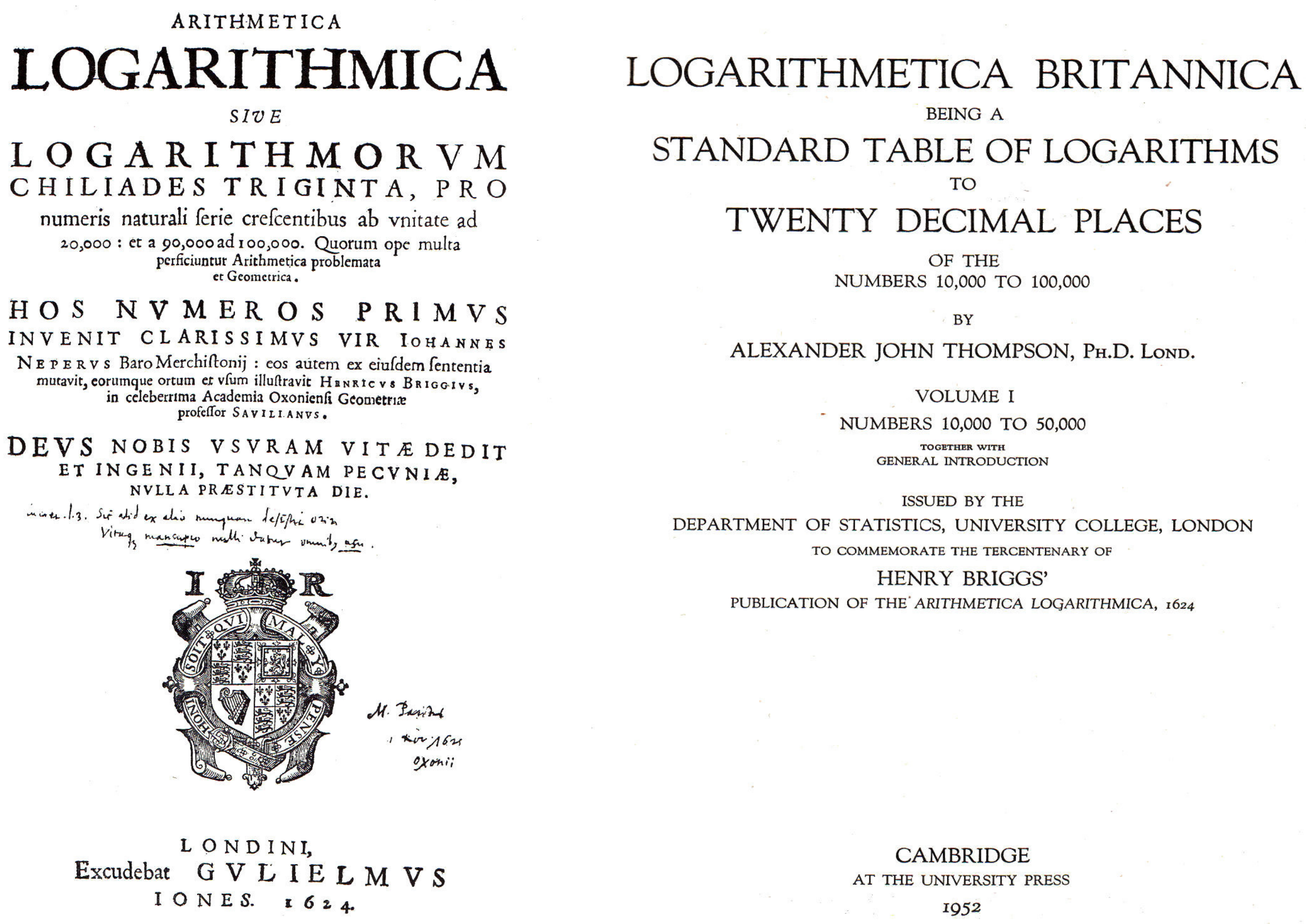
Price £8. 8*s*. 0*d*.

(iii)

Bild 1: Anzeige in Biometrika Dezember 1964, gekürzt

Die Verbindung zwischen der *Logarithmetica* und Briggs geht noch weiter. Der Anhang des ersten Bandes enthält zudem einen historischen Aufsatz[3] über Briggs' Leben und Werk sowie eine Tafel mit Fehlern in der *Arithmetica Logarithmica*.

[3] Aus Thomas Smith: Vitae quorundam eruditissimorum et illustrium virorum, 1707, übersetzt von J. T. Foxell.



ARITHMETICA
LOGARITHMICA
SIVE
LOGARITHMORVM
CHILIADES TRIGINTA, PRO
numeris naturali ſerie creſcentibus ab vnitate ad
20,000 : et a 90,000 ad 100,000. Quorum ope multa
perficiuntur Arithmetica problemata
et Geometrica.

HOS NVMEROS PRIMVS
INVENIT CLARISSIMVS VIR IOHANNES
NEPERVS Baro Merchiſtonij : eos autem ex eiuſdem ſententia
mutavit, eorumque ortum et vſum illuſtravit HENRICVS BRIGGIVS,
in celeberrima Academia Oxonienſi Geometriæ
profeſſor SAVILIANVS.

DEVS NOBIS VSVRAM VITÆ DEDIT
ET INGENII, TANQVAM PECVNIÆ,
NVLLA PRÆSTITVTA DIE.

I R

LONDINI,
Excudebat GVLIELMVS
IONES. 1624.

LOGARITHMETICA BRITANNICA
BEING A
STANDARD TABLE OF LOGARITHMS
TO
TWENTY DECIMAL PLACES
OF THE
NUMBERS 10,000 TO 100,000
BY
ALEXANDER JOHN THOMPSON, PH.D. LOND.

VOLUME I
NUMBERS 10,000 TO 50,000
TOGETHER WITH
GENERAL INTRODUCTION

ISSUED BY THE
DEPARTMENT OF STATISTICS, UNIVERSITY COLLEGE, LONDON
TO COMMEMORATE THE TERCENTENARY OF
HENRY BRIGGS'
PUBLICATION OF THE *ARITHMETICA LOGARITHMICA*, 1624

CAMBRIDGE
AT THE UNIVERSITY PRESS
1952

Bild 2: Frontispiz und Titelseite in Band 1 der *Logarithmetica Britannica*

Nachdem weniger als zwanzig Jahre zuvor wegen gestiegener Anforderungen an die Genauigkeit von Berechnungen die 8-stellige Tafel von Bauschinger und Peters gerechnet wurde stellt sich die Frage nach der Notwendigkeit einer 20-stelligen Logarithmentafel.
In einer Vorbemerkung zum Tafelwerk vom November 1924 gibt Pearson die Antwort. Er schreibt, dass die Logarithmentafeln mit bis zu sieben Stellen so gut wie der Vergangenheit angehören. An ihre Stelle sind Rechenmaschinen mit 18 oder seltener 20 Stellen im Ergebnis getreten. Sofern diese Maschinen der geforderten Genauigkeit nicht oder nur unter erheblichem Arbeitsaufwand genügen können besteht Bedarf an Logarithmentafeln mit 10, 15 oder 20 Stellen. In den Rechenzentren ist der Bedarf so gross, dass man zuweilen auf die originalen Tafeln von Briggs oder Vega[4] zurückgreift, trotz ihres hohen Preises und der Unsicherheit über falsche Zahlenwerte.

Für uns heute liegt der Wert der *Logarithmetica Britannica* auf der mathematikhistorischen Seite in den umfangreichen Darstellungen des Bearbeiters zu seinen Rechenverfahren sowie in der Rechenmaschine, die zu diesem Zweck gebaut wurde. Auf beide Themen gehen wir im Folgenden ein.

Die Differenzenmaschine

Thompson führt seine Berechnungen zunächst mit einer einzelnen, d.h. handelsüblichen mechanischen Rechenmaschine aus. Er erkennt jedoch sehr schnell, dass eine Maschine zur Verarbeitung von vier oder fünf Differenzen die Arbeit wesentlich erleichtern könnte. Da eine Maschine dieser Art nicht zur Verfügung steht, auch keine der historischen, erfindet er eine und lässt sie bauen.

---

[4] Gemeint ist der zehnstellige *Thesaurus Logarithmorum Completus,* 1. Aufl. Leipzig 1794 u. ö. von Georg Freiherr v. Vega.
Die Encyclopaedia Britannica Ausg. 1911, schreibt im Stichwort 'Mathematical Tables': „*A copy of Vlacq's Arithmetica logarithmica (1628 or 1631), with the errors in numbers, logarithms, and differences corrected, is still the best table for a calculator who has to perform work requiring ten-figure logarithms of numbers, but the book is not easy to procure, and Vega's Thesaurus has the advantage of having log sines, &c., in the same volume.*“ Bis 1924 scheint sich daran nichts geändert zu haben.

Thompson vertritt die Meinung, seine Maschine sei die einzige dieser Bauart – womit er Recht hat – und deshab habe er auch nicht die Absicht, technische Einzelheiten sowie alle Methoden wie man mit ihr arbeitet zu erläutern. Folgt man jedoch seinen Ausführungen lassen sich ungenannte Details rekonstruieren.
Die Maschine besteht aus vier hintereinander angeordneten Einzelmaschinen, die auf einem treppenförmigen Kasten stehen und miteinander verbunden sind. Bild 3 zeigt die Maschine, es war dies die einzige bisher bekannte Abbildung.

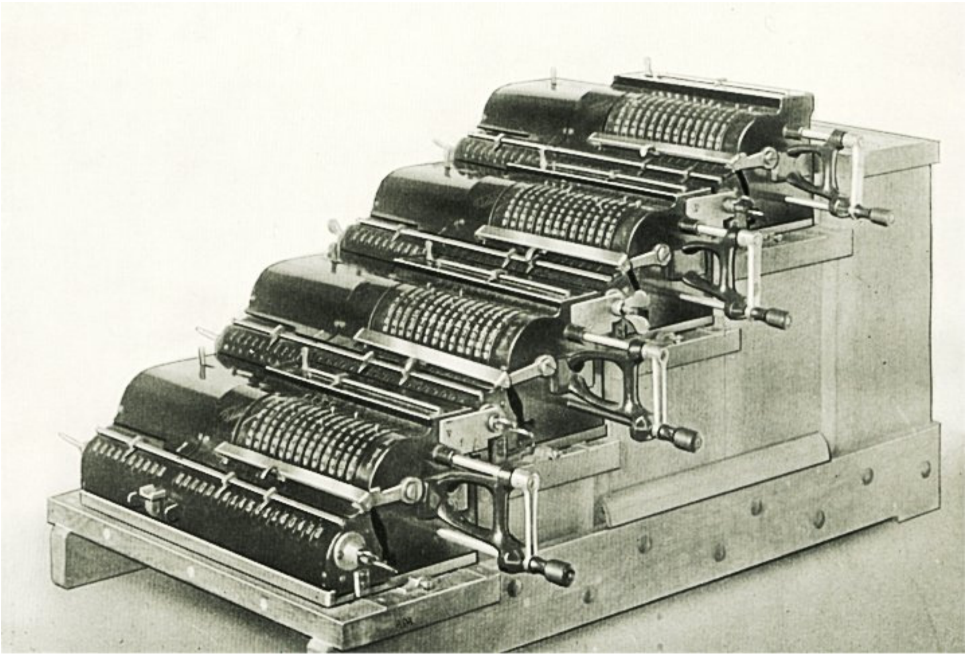


Bild 3: Die Differenzenmaschine

Die freie Standfläche hinter der Maschine ganz oben lässt vermuten, dass eine fünfte vorgesehen war. Hersteller der Maschinen war die Firma Triumphator in Leipzig-Mölkau. Diese Aussage wird so nirgendwo gemacht, jedoch bedankt sich Thompson in der Einleitung bei Mr. Charles Beveridge, dem vormaligen Vertreter für Triumphator-Rechenmaschinen, für dessen Ratschläge und für die Überlassung seines Bestandes an Ersatzteilen. Die Einzelmaschinen, die für den Zusammenbau verwendet wurden, waren Umbauten von handelsüblichen Maschinen, erweitert auf 13 Stellen in der Eingabe[5]. Der Umbau ist an mehreren Stellen erkennbar, u. a. an den Schlitzen im Deck-

[5] In Handel erhältliche Triumphator-Rechenmaschinen sind u.a. bei Martin (Lit. 6) beschrieben.

blech, die durch den schrägen Schriftzug 'Triumphator' führen.Ein Druckwerk ist nicht vorhanden. Der Wunsch nach einem Druckwerk und nach Mechanismen zur automatischen Ausführung von Berechnungen scheiterte an der zu langen Entwicklungszeit und den damit verbundenen hohen Kosten.

Die Maschine existiert noch. Sie wird am Department of Statistical Science, University College, London, aufbewahrt. Anlässlich einer Besichtigung im Februar 2007 wurden Aufnahmen gefertigt, die in Bild 5 wiedergegeben sind.

Bevor wir mit der Beschreibung der Maschine von Thompson fortfahren soll zunächst mit Bild 4 der Aufbau und die Verwendung einer Einzelmaschine erläutert werden.

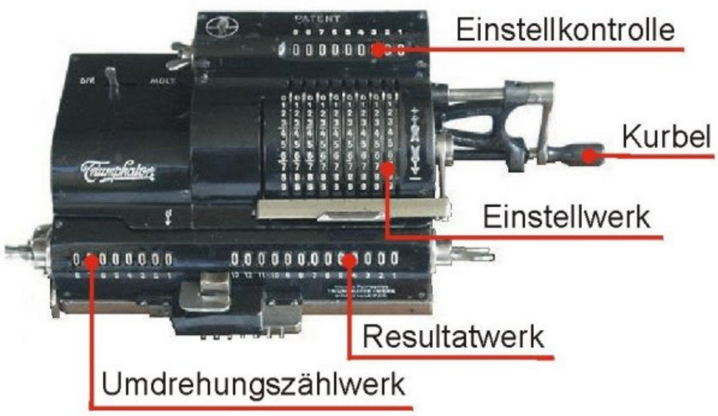


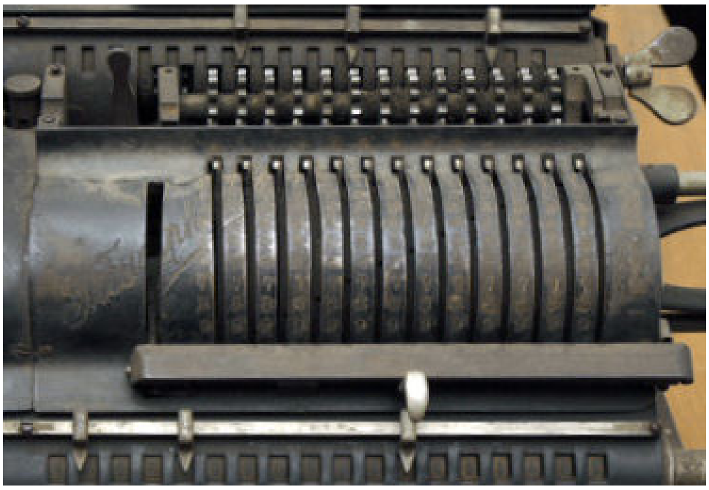
Bild 4: eine einzelne Rechenmaschine

Zu Beginn einer Rechnung stellt man die Zahlen am Einstellwerk ein. Dazu verschiebt man kleine Hebel in Schlitzen der gewölbten Deckplatte, bis sie auf die gleichen Ziffern zeigen wie die Zahl die eingestellt werden soll. Manche Maschinen besitzen oberhalb des Einstellwerks noch eine Einstellkontrolle, in der die Ziffern der Zahl in einer Linie nebeneinander sichtbar sind. Mit einem Querbügel unterhalb der Schlitze lassen sich alle Einstellhebel zusammen mit einer Bewegung nach oben auf null stellen.
Unter dem Einstellwerk sind das Resultatwerk und daneben das Umdrehungszählwerk eingebaut. Beide zeigen mehrstellige Zahlen an, sie sitzen in einem Wagen oder Schlitten und lassen sich mit diesem quer verschieben. Mit Flügelschrauben neben der Einstellkontrolle, dem Resultatwerk und dem Umdrehungszählwerk stellt man die angezeigten Zahlen auf null.

Dreht man die Kurbel in positiver Richtung wird die eingestellte Zahl zu der Zahl im Resultatwerk addiert, dreht man die Kurbel in negativer Richtung wird die eingestellte Zahl von der Zahl im Resultatwerk abgezogen. Das Umdrehungszählwerk zählt in jeder Position des Schlittens die Anzahl der Kurbeldrehungen. Mit dieser Funktion und mit dem verschieblichen Schlitten lässt sich eine Maschine dieser Bauart nach den Regeln eines Stellenwertsystems für Multiplikationen und Divisionen verwenden.
Auf innere Einrichtungen der Maschine gehen wir nicht ein weil sie für ihre Anwendung ohne Bedeutung sind.

Für den Einsatz der Maschine hingegen wesentlich ist ihre sogenannte Kapazität. Darunter versteht man die Anzahl der Stellen im Einstelwerk, im Umdrehungszählwerk und im Resultatwerk. Zahlen mit grösserer Stellenzahl als die Kapazität lassen sich nicht einstellen bzw. als Resultat nicht anzeigen. Thompsons umgebaute Maschinen sind 13-stellig im Einstellwerk und 18-stellig im Resultatwerk.

Zwischen den Maschinen besteht eine mechanische Verbindung von der Art dass das Resultatwerk einer Maschine mit dem Einstellwerk der jeweils davor stehenden Maschine gekoppelt ist, wodurch die charakteristische treppenartige Aufstellung notwendig wird. Zahlen im Resultatwerk einer Maschine lassen sich in das Einstellwerk der nächsten Maschine übertragen. Der umgekehrte Weg vom Einstellwerk zum Resultatwerk der Maschine dahinter ist ebenfalls möglich. Diese mechanische Kopplung erfolgt über die ausgebaute Einstellkontrolle. Sie zur Folge, dass die Wagen mit den Resultatwerken nicht mehr quer verschoben werden können. Weiterhin muss man annehmen, dass bei der Übertragung vom Resultatwerk einer Maschine zum Einstellwerk der nächsten Maschine vor ihr als Zwischenschritt das vorherige Löschen des Einstellwerks notwendig wird. Andernfalls lässt sich die Zahl nicht richtig übertragen.



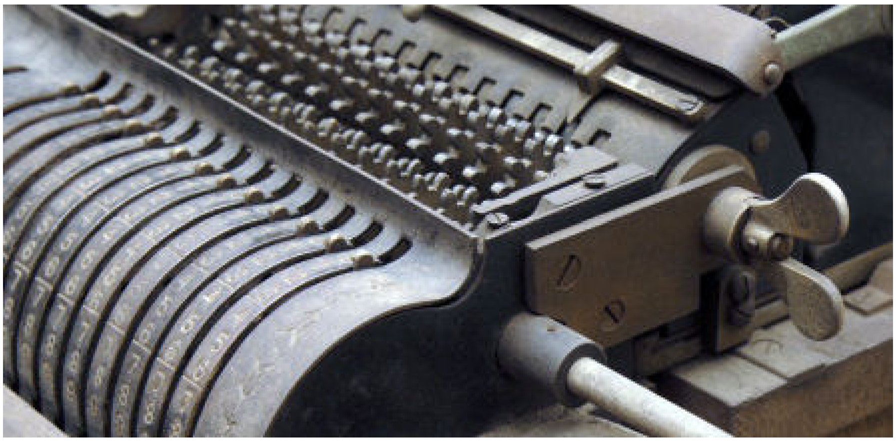


Bild 5:
Detailaufnahmen der Differenzenmaschine von Thompson.
Sie zeigen den Übertragungsmechanismus zwischen den Maschinen. Im Bild oben erkennt man links den durchschnittenen Schriftzug. Im Bild unten ist die Fixierung des Schlittens durch eine seitlich angebrachte Platte zu sehen.

Mit den mechanischen Verbindungen der vier Maschinen untereinander entsteht eine neue Maschine mit neuen Eigenschaften, nämlich eine vierstufige serielle Addiermaschine mit vier Kurbeln und eingerichtet für Zahlen mit maximal 13 Stellen. Die Maschine ist für das Aufsummieren nach den Methoden der Rechnung mit Finiten Differenzen gleichermassen geeignet wie für die Berechnung der Differenzen selbst. Thompson nennt seine Maschine daher eine *"integrating and differencing machine"*. Er meint mit dieser Bezeichnung nicht die Bedeutung von *to integrate* und *to differentiate* in der Mathematik sondern vielmehr entsprechend dem Verwendungszweck der Maschine die ursprüngliche Bedeutung der Verben im Sinne von vervollständigen, aufsummieren bzw. unterscheiden, Differenzen bilden. Weil diese Bezeichnung schwer in einen einfachen Namen zu übersetzen ist und wegen ihrer für eine Differenzenmaschine charakteristischen Bauart erscheint es gerechtfertigt, neben dieser umfassenden Bezeichnung auch vereinfacht von einer Differenzenmaschine zu sprechen.

Rechnungen mit der Maschine

Erstes Rechenbeispiel: Ermittlung von Funktionswerten

Mit der folgenden Aufgabe lässt sich das Prinzip der Differenzenrechnung für das Erstellen von Tabellen und gleichzeitig die Anwendung der Maschine gut demonstrieren. In diesem Rechenbeispiel, das auch im Vorwort zum Tafelwerk ausgeführt wird, soll eine Wertetabelle der Funktion $y = x^4$ mit den Argumenten $x = 1, 2, 3, \ldots$ erstellt werden.

Die Wertetabelle ist weiter unten aufgezeichnet. Die linke Spalte enthält nach unten fortlaufend die Argumente x, in der zweiten Spalte sind die zugehörigen Funktionswerte eingetragen. Die nächste Spalte enthält die ersten Differenzen[6], gebildet aus der Differenz zwischen dem nächsten und dem vorhergehenden Funktionswert (16 – 1 = 15, 81 – 16 = 65 usw.). Die rechts folgenden Spalten enthalten die zweiten, dritten und vierten Differenzen, die aus den

[6] Thompson verwendet zur Bezeichnung der Differenzen das kleine griechische delta (δ), ihre Hochzahl kennzeichnet die Ordnung der Differenz (δ^2 die zweite, δ^3 die dritte Differenz usw.).

Werten der Differenzen in der jeweils linken Spalte gebildet werden. Die vierten Differenzen sind konstant, da 4 die höchste Potenz von x ist. Alle noch höheren Differenzen besitzen den Wert null und werden deshalb hier nicht mehr dargestellt.

x	x^4	δ	δ^2	δ^3	δ^4
1	1				
		15		36	
2	16		50		24
		65		$\underline{60}$	
3	81		$\underline{110}$		24
		$\underline{175}$		84	
4	$\underline{256}$		194		24
		369		108	
5	625		302		24

Mit nur einigen Anfangswerten in der Tabelle, die man zuvor ausrechnen muss, lassen sich alle weiteren Funktionswerte ermitteln. Die folgende Rechnung zeigt die Vorgehensweise (die neu errechneten Werte sind in der Tabelle durch Unterstreichung markiert):

> Die konstante vierte Differenz 24 wird zur bisherigen dritten Differenz 36 addiert und ergibt die neue dritte Differenz 60.
> Diese wird zur bisherigen zweiten Differenz 50 addiert und ergibt die neue zweite Differenz 110.
> Diese wird zur bisherigen ersten Differenz 65 addiert und ergibt die neue erste Differenz 175.
> Diese wird zum bisherigen Funktionswert 81(= 3^4) addiert und ergibt den neuen Funktionswert 256 (= 4^4).

Die Rechnung würde dann fortgesetzt mit der Addition

> vierte Differenz 24 plus dritte Differenz 60 ergibt die neue dritte Differenz 84

usw. bis zum nächsten Funktionswert 625 (= 5^4).

Mit diesem Verfahren lassen sich bei der Erstellung einer Wertetabelle Multiplikationen und Divisionen durch fortgesetzte Additionen (oder Subtraktionen wenn eine Differenz negativ ist) ersetzen. Zusätzlich zu einem

Funktionswert muss in jeder Ordnung der Differenzen nur ein Wert bekannt sein, man hat jedoch darauf zu achten welche notwendig sind. Das Verfahren ist einfach und lässt sich mit mechanischen Rechenmaschinen bis zu einem gewissen Grad automatisieren. Der Einsatz einer Maschine schliesst Rechenfehler aus. Allen historischen Differenzenmaschinen liegt diese Idee zur Vereinfachung und Automatisierung des Differenzenverfahrens zu Grunde.

Führt man die gleiche Rechnung Schritt für Schritt mit der Differenzenmaschine von Thompson aus lässt sich ein Verständnis für ihre Anwendung und ihre besonderen Eigenschaften gewinnen. Papier, Schreibzeug und abgekürzte Notationen für die Werke der Maschinen sind hierzu ausreichend.

In Bild 6 ist die Differenzenmaschine schematisch von der Seite dargestellt. Die einzelnen Maschinen sind von vorn nach hinten mit M1 bis M4 gekennzeichnet. Weiterhin bezeichnen K die Kurbeln, Ew die Einstellwerke und Rw die Resultatwerke der Maschinen M1 bis M4.

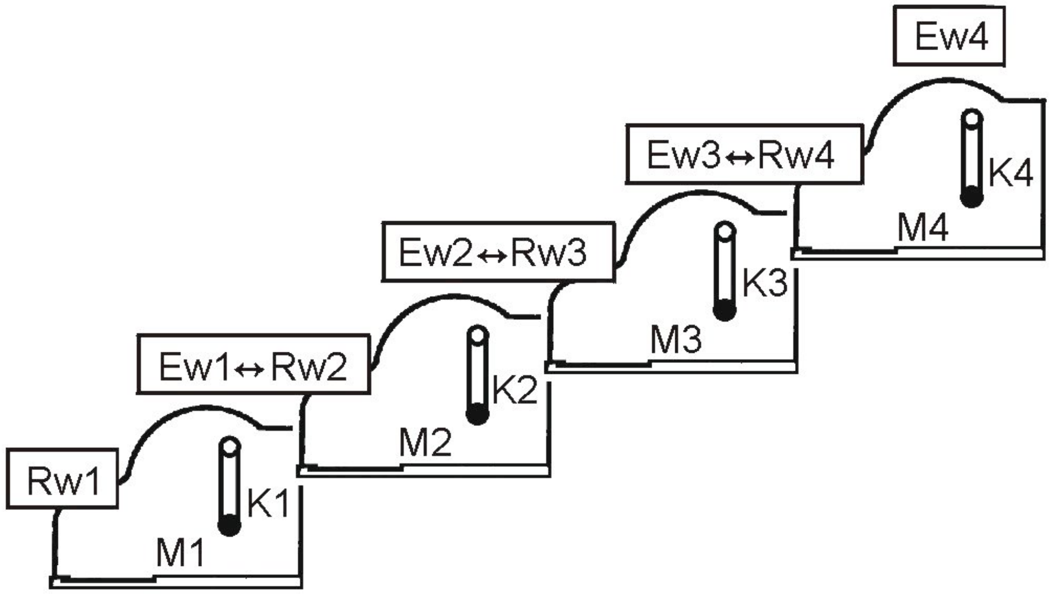


Bild 6: schematische Darstellung der Maschine, Erläuterung im Text

Auf der Differenzenmaschine läuft die obige Rechnung in den nachfolgend aufgeführten Schritten ab. Die Aufzählungspunkte 1 bis 8 sind in den Skizzen Bild 7.1 und 7.2 schematisch als Blick auf die Maschine nochmals dargestellt. In den Skizzen markieren Pfeile Aktionen an der Maschine, Sterne markieren solche Zahlen in Werken, die sich in diesem Zustand geändert haben):

1. einstellen der Anfangszahlen:
   vierte Differenz 24 in Ew4,
   dritte Differenz 36 in Rw4,
   zweite Differenz 50 in Rw3,
   erste Differenz 65 in Rw2,
   Funktionswert 81 in Rw1,
2. drehen der Kurbel K4 ergibt die dritte Differenz 60 in Rw4,
3. übertragen dieses Wertes in Ew3,
4. drehen der Kurbel K3 ergibt die zweite Differenz 110 in Rw3,
5. übertragen dieses Wertes in Ew2,
6. drehen der Kurbel K2 ergibt die erste Differenz 175 in Rw2,
7. übertragen dieses Wertes in Ew1,
8. drehen der Kurbel K1 ergibt den Funktionswert 256 in Rw1.

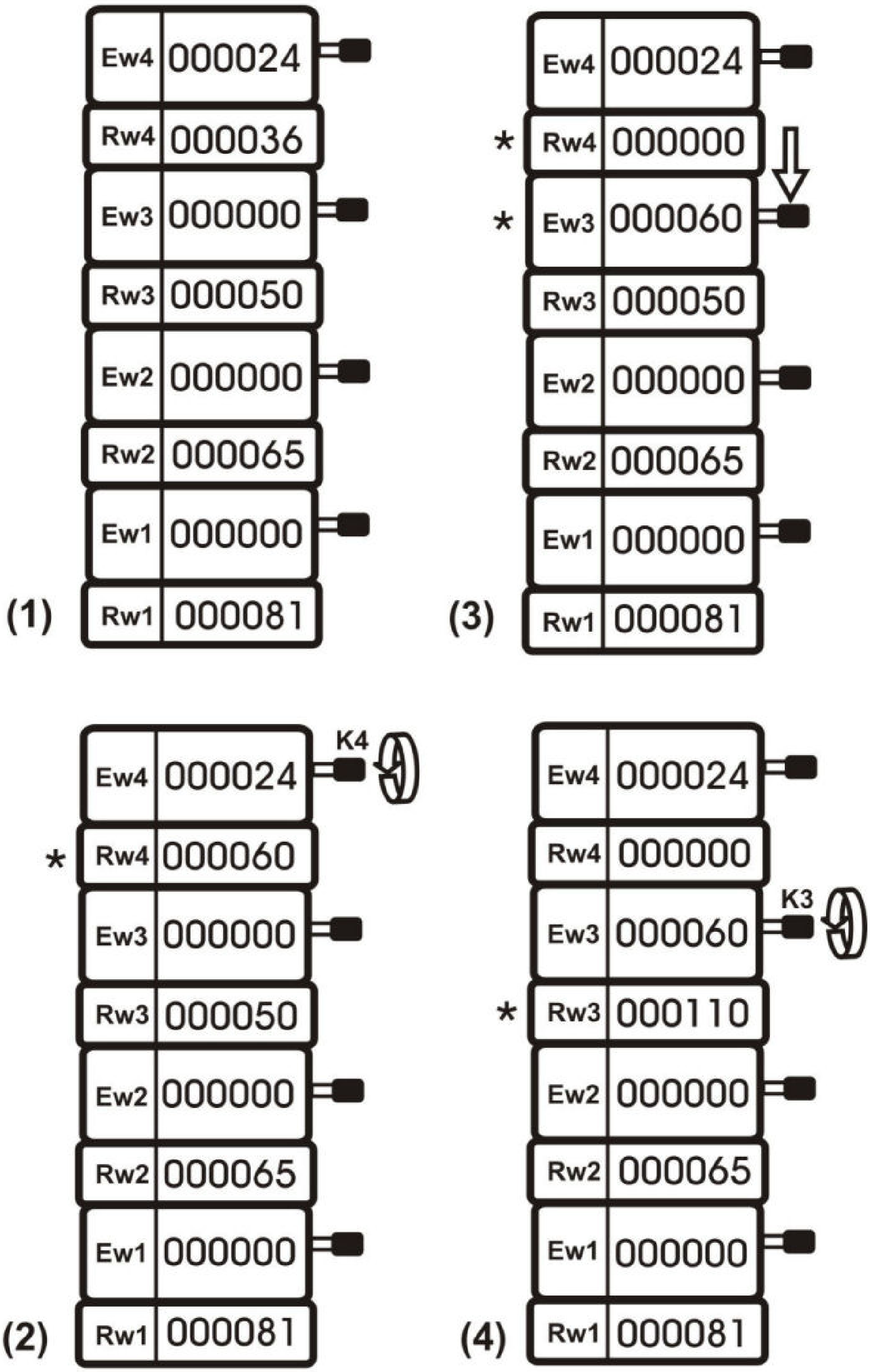


Bild 7.1: Rechenbeispiel, Erläuterung s. Text

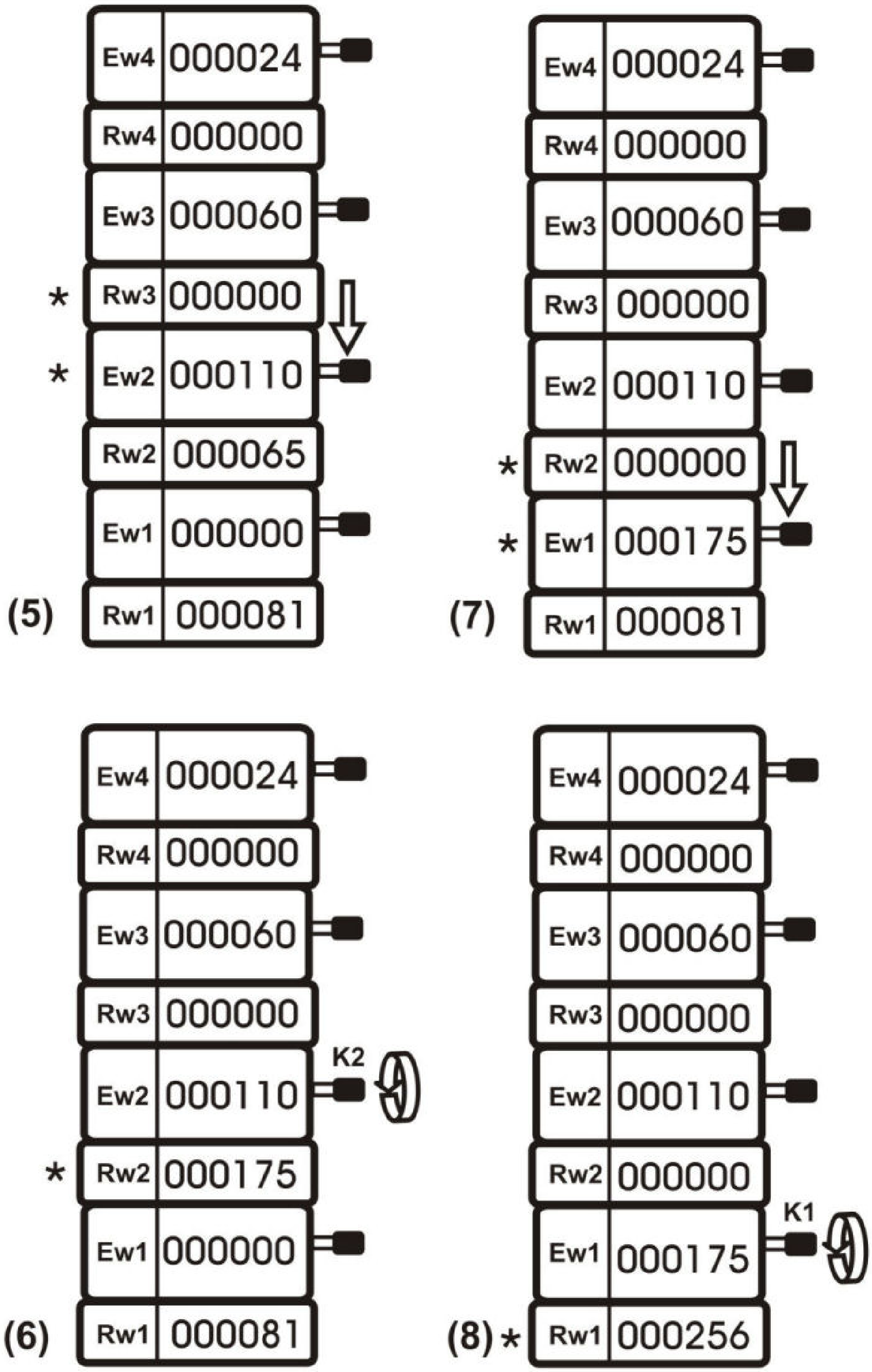


Bild 7.2: Rechenbeispiel, Erläuterung s. Text

Der nächste Durchgang zur Berechnung des folgenden Funktionswertes 625 beginnt wieder mit drehen der Kurbel K4, in Ew4 steht immer noch die konstante vierte Differenz 24 und es müssen enthalten sein
in Rw4 die neue dritte Differenz 60,
in Rw3 die neue zweite Differenz 110,
in Rw2 die neue erste Differenz 175.

Thompson macht an dieser Stelle seiner Erklärung eine aufschlussreiche Bemerkung. Er sagt, bevor der neue Durchgang beginnen kann müssen die zuvor gewonnene neue dritte Differenz 60, die zweite Differenz 110 und die erste Differenz 175 erst wieder vom Einstellwerk in das Resultatwerk übertragen werden. Dieser notwendige Zwischenschritt lässt den Schluss zu, dass die Übertragung einer Zahl vom Einstellwerk in das Resultatwerk oder umgekehrt die Löschung dieser Zahl im Werk des Ursprungs mit sich bringt. Mit anderen Worten: die Übertragung der Ergebnisse aus dem Resultatwerk einer Maschine in das Einstellwerk der nächsten Maschine im Durchgang zuvor hat die Ergebnisse in den Resultatwerken gelöscht. Solche Zwischenschritte sind bei der Kopplung der Werke durch Zwischenglieder in Form von Zahnrädern unvermeidlich, machen den Rechenablauf jedoch umständlich.

Es gibt Funktionen die sich nicht so einfach tabellieren lassen. Solange die Anfangswerte der Funktion und der Differenzen exakt sind wie im vorgeführten Beispiel entstehen auch fortlaufend richtige Ergebnisse. Gibt es hingegen keine höchste konstante Differenz und hat man es mit Näherungswerten an Stelle von genauen Zahlen zu tun wie das bei der Logarithmusfunktion und anderen transzendenten Funktionen der Fall ist dann werden die Summen der Differenzen nach und nach immer ungenauer. Letztendlich erhält man auch nur fehlerbehaftete Näherungen für die gesuchten Funktionswerte. Zur Abhilfe muss der Frage nachgegangen werden wie gross diese Fehler sind und wie man sie in vorgegebenen Grenzen hält. Neben den historischen Differenzenmaschinen selbst ist dieses Problem und seine Lösung ein wesentlicher Punkt in der Geschichte der Logarithmentafeln. Im Abschnitt über das Berechnen der Logarithmen wird darauf nochmals eingegangen.

Zweites Rechenbeispiel: Logarithmen und Differenzen

Thompson spricht eine Art von Rechnungen an, deren Ausführung einfach zu sein scheint, tatsächlich aber ein weiteres Problem bei der Verwendung seiner Differenzenmaschine aufzeigt.

In Rechnungen mit Logarithmen und Differenzen kommen fortgesetzte Additionen und Subtraktionen vor, etwa in der Form $-A + 2B + C$. Dies ist beispielsweise der Fall bei der Berechnung eines Logarithmus nach der Beziehung

$$\log(N+1) = \underbrace{-\log(N-1)}_{(A)} + \underbrace{2\log(N)}_{(B)} + \underbrace{\delta^2\log(N)}_{(C)}$$

Obiger Ausdruck ergibt sich aus der Umstellung des Ausdrucks für $\delta^2\log(N)$ in der Tabelle in Anhang 5.

Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die zweiten (und auch die vierten) Differenzen negativ sind läuft eine solche Rechnung auf der Maschine in folgenden Schritten ab:

1. löschen des Resultatwerks,
2. einstellen der Zahl A im Einstellwerk,
3. drehen der Kurbel in negativer Richtung,
4. einstellen der Zahl B im Einstellwerk,
5. zweimaliges drehen der Kurbel in positiver Richtung,
6. einstellen der Zahl C im Einstellwerk,
7. drehen der Kurbel in negativer Richtung.

Nach diesen Aktionen steht das Ergebnis im Resultatwerk.
In Wirklichkeit sind die Summanden Zahlen mit mehr als 20 Stellen, während das Einstellwerk der Maschine jedoch nur 13 Stellen besitzt. Die erste Einzelmaschine mit der Thompson gerechnet hat besass sogar nur 9 Stellen im Einstellwerk. Die Summanden müssen daher aufgeteilt und in zwei getrennten Rechnungen abgearbeitet werden. Die nachfolgende Tabelle stellt den tatsächlichen Ablauf schematisch dar. Wir setzen dazu

$N = 15455$ (vgl. Bild 9).

Thompson hat seine Zwischenrechnungen mit mehr als 20 Stellen ausgeführt, wir können hier die Werte nur 20-stellig der Tafel entnehmen und erhalten

```
A = log(N–1)  =   18904 09079 09009 92819
B = log(N)    =   18906 90093 99323 73840
C = δ²log(N)  =  -00000 00018 18219 42567
```

Der erste Rechenlauf R1 verarbeitet zunächst die zehn rechten Ziffern aller Summanden, danach folgt der gleiche Lauf R2 noch einmal mit den zehn linken Ziffern der Summanden und mit einem Übertrag, falls einer wie hier im ersten Durchgang aufgetreten ist.

	2. Lauf R2	1. Lauf R1
A	– 1890409079	– 0900992819
B	+ 1890690093	+ 9932373840
B	+ 1890690093	+ 9932373840
C	– 0000000018	– 1821942567
	1	
Summe	**1890971090**	**17141812294**

Wir erhalten $\log 15456 =$ 18909 71090 71418 12294

Thompson spricht davon dass es auch zweckmässig sein kann mit einer Überlappung von einer oder zwei Ziffern zu rechnen.

Die beiden oben ausgeführten Rechnungen vermitteln einen ersten Eindruck vom Gebrauch der Maschine und von ihren Vor- und Nachteilen. Ein geübter Rechner, der Thompson sicherlich war, kannte natürlich noch sehr viel mehr Verfahren und Methoden im Umgang mit seiner Maschine, die uns nicht geläufig sind.

Anfang des Jahrhunderts hatte man in Deutschland ebenfalls eine Logarithmentafel mit einer Differenzenmaschine gerechnet. Ein Vergleich dieser Maschine mit der von Thompson wird in Anhang 3 angestellt. Er deckt markante Unterschiede auf.

Die Berechnung der Logarithmen

Thompson ist der Auffassung, dass für das Erstellen einer Zahlentafel zwei Gesichtspunkte wesentlich sind: erstens muss das Zahlenmaterial den Forderungen nach Genauigkeit entsprechen und zweitens sind die besten Rechenverfahren jene, die den geringsten Aufwand erfordern. Mit dem ersten Punkt spricht er die Zuverlässigkeit der Tafeln an – ein Problem das sich wie ein roter Faden durch die Geschichte der Zahlentafeln zieht. Der zweite Punkt, den geringsten Aufwand betreffend, erscheint selbstverständlich, hat aber zur Folge, dass er die Methoden der Berechnungen zum gleichen Ziel hin variiert.

In seinem Vorwort verzichtet Thompson auf Beschreibungen, wie er bei seinen Berechnungen der Logarithmentafel im Einzelnen vorgegangen ist. Deshalb schreibt er auch nicht darüber, welche Versuche und Proberechnungen er dabei durchgeführt hat. Stattdessen greift er auf seine Erfahrung zurück und zeigt umfassend in Darlegungen und Ableitungen, wie man vorgehen könnte. Im Folgenden kann nur ein einfacher Überblick gegeben werden. Wer sich tiefer mit der Materie befassen möchte muss auf den Originaltext zurückgreifen. In Anhang 2 sind die darin behandelten Themen aufgelistet.

Einen breiten Raum in den Erörterungen nimmt die Interpolation[7] ein, da Verfahren der Interpolation sowohl beim Gebrauch der Logarithmentafel als auch bei ihrer Erstellung verwendet werden. Thompson beschreibt hierzu vier Methoden.
Weiterhin leitet er ab

- Formeln zur Reihenentwicklung der Logarithmusfunktion, um damit einzelne Werte zu berechnen,
- die Berechnung von Differenzen gerader Ordnung bis zur zwanzigsten (δ^{20}) aus aufeinander folgenden Logarithmen. Sie dienen zur Prüfung nicht sicherer Differenzen oder einzelne Numeri in einer Folge. In Anhang 5 wird beispielhaft eine verkürzte Tabelle der Differenzen bis zur vierten Ordnung gezeigt,
- Formeln für die Differenzen gerader Ordnungen δ^2 bis δ^8, um damit die Differenzen der interpolierten Werte aus den Differenzen der Basistafel berechnen zu können.

Damit steht für die geplante Aufgabe ein grosses Instrumentarium zur Verfügung.

Für das Erstellen seiner Tafel verwendet Thompson eine Basistafel, die er durch Interpolieren erweitert. Diese Basistafel soll bei grossen Intervallen der Numeri deutlich mehr Stellen in den Funktionswerten besitzen als die spätere Tafel. Er greift zu diesem Zweck auf die Tafel von Sharp (Lit. 9) zurück, wie sie auch bei Callet (Lit. 3) abgedruckt ist. Sie enthält die 63-stelligen Logarithmen der Zahlen 1 bis 99 und der Primzahlen von 101 bis 1097. Bild 8 zeigt einen Ausschnitt dieser Tafel und ein Ablesebeispiel.

[7] Thompson zitiert aus einer nicht näher genannten Quelle, die sehr treffend das Interpolieren als das Lesen zwischen den Zeilen einer Zahlentafel umschreibt.

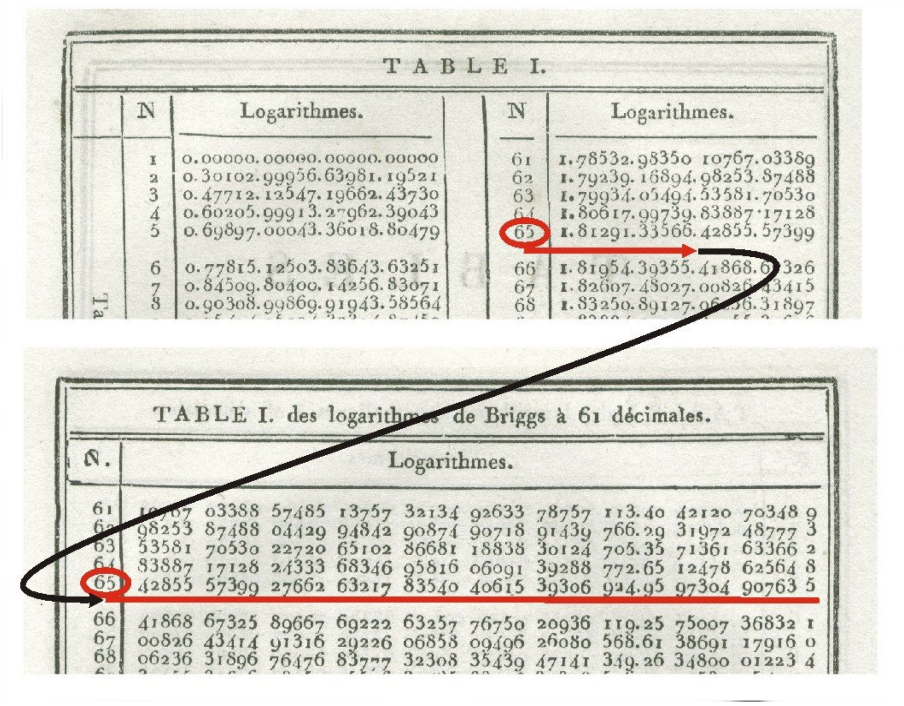


TABLE I.

N	Logarithmes.	N	Logarithmes.
1	0.00000.00000.00000.00000	61	1.78532.98350 10767.03389
2	0.30102.99956.63981.19521	62	1.79239.16894.98253.87488
3	0.47712.12547.19662.43730	63	1.79934.05494.53581.70530
4	0.60205.99913.27962.39043	64	1.80617.99739.83887·17128
5	0.69897.00043.36018.80479	65	1.81291.33566.42855.57399
6	0.77815.12503.83643.63251	66	1.81954.39355.41868.6[illegible]326
7	0.84509.80400.14256.83071	67	1.82607.48027.00826[illegible]3415
8	0.90308.99869.91943.58564	68	1.83250.89127.0[illegible]36.31897

TABLE I. des logarith[illegible] de Briggs à 61 décimales.

N.	Logarithmes.									
61	[illegible]	03388	57485	13757	32134	92633	78757	113.40	42120	70348 9
62	98253	87488	04429	94842	90874	90718	91439	766.29	31972	48777 3
63	53581	70530	22720	65102	86681	18838	30124	705.35	71361	63366 2
64	83887	17128	24333	68346	95816	06091	39288	772.65	12478	62564 8
65	42855	57399	27662	63217	83540	40615	39306	924.95	97304	90763 5
66	41868	67325	89667	69222	63257	76750	20936	119.25	75007	36832 1
67	00826	43414	91316	29226	06858	09496	26080	568.61	38691	17916 0
68	06236	31896	76476	83777	32308	35439	47141	349.26	34800	01223 4

Bild 8: Ausschnitt der Tafel von Callet mit Ablesebeispiel log65

Diese Tafel wird auf 26 bis 28 Stellen reduziert. Aus ihr berechnet er die Differenzen gerader Ordnung bis zehn (δ^{10}). Diese Differenzen dienen dazu, die Basistafel auf Fehler[8] zu prüfen und Material für die geplante Tafel herzustellen.

Für seine neue Tafel müsste Thompson zwischen je zwei Werten bei Callet 99 Zwischenwerte interpolieren, beispielsweise vom Intervall [530, 531] auf das Intervall [53000, 53001,..., 53100]. Solche Abstände sind zu gross, als dass sie mit realisierbarem Aufwand durchgehend in der gewünschten Genauigkeit[9] abgedeckt werden könnten. Deshalb arbeitet Thompson mit einer Zwischentafel. Diese enthält, wenn wir bei unserem Beispiel für Intervalle bleiben, die Eingänge [5300, 5301,..., 5310]. Für alle Eingänge der Zwischentafel berechnet er die Logarithmen 25-stellig, soweit sie noch nicht bekannt sind, sowie die Differenzen gerader Ordnung bis zur achten (δ^{8}).

---

[8] Zu den Fehlern dieser Tafel bei Callet s. Anh. 4.

[9] Aus der Vergangenheit kennen wir Fehler in Logarithmentafeln, die mit grosser Wahrscheinlichkeit darauf zurückzuführen sind, dass man zuviele Interpolationen hintereinander ohne Prüfung oder Korrektur dazwischen ausgeführt hat. Thompson spricht diesen Sachverhalt an und nennt als Beispiel die *Tables du Cadastre* (1794 – 1799) und eine Tafel von G. und E. Scheutz (1857).

Die Werte in der Zwischentafel dienen als Prüf- und Ausgangspunkte für die fortlaufende Interpolation zur Gewinnung der endgültigen Tafel. Nach je zehn Interpolationen werden die Ergebnisse überprüft.

Die verwendeten Rechenverfahren variieren. Gründe hierfür können im Wechsel von einer einzelnen Maschine zur Differenzenmaschine, in dem für eine Fehlerbestimmung einfachsten Weg oder auch nur im Wertebereich der Numeri liegen. So spart sich Thompson Arbeit und rechnet für die Numeri N = 40000 bis 50000 nach der Beziehung

$$\log(N) = \log(2N) - \log(2).$$

Dafür müssen log(80000) bis log(100000) bekannt sein. In diesem Wechsel der Verfahren liegt der Grund warum die Wertebereiche der Numeri in einer scheinbar nicht zusammenhängenden Reihenfolge bearbeitet und dann veröffentlicht werden.

Wie bereits weiter oben erwähnt sind sowohl die Logarithmen selbst als auch ihre Differenzen wegen der Beschränkung auf eine begrenzte Anzahl von Stellen mit Fehlern behaftete Näherungswerte. Zudem gibt es keine konstante Differenz, obwohl die Konstanz der höchsten Differenz im Differenzenverfahren mit der Maschine vorausgesetzt wird. Die Abschätzung der Grösse von Fehlern und deren Prüfung nimmt deshalb einen sehr breiten Raum ein. Thompson wendet hierzu unterschiedliche Methoden und Verfahren an. Dazu gehören unter anderem die Arbeit mit Zwischenwerten von mehr als 20 Stellen wie auch der Vergleich mit anderen Logarithmentafeln, wobei Thompson dazu betont, er habe nur verglichen.
Eine Besprechung aller Verfahren, die Thompson nennt, muss hier unterbleiben, sie würde den Rahmen dieses Aufsatzes weit übersteigen.

Druck und letzte Prüfung

Die Kosten für das Setzen und den Druck der Tafel kann Thompson verringern, indem er ein Monotype Keyboard beschafft und die Ergebnisse der Berechnungen selbst darauf schreibt. Diese Maschine erzeugt einen Lochstreifen, der dann in einer Setzmaschine das Setzen der Lettern automatisch steuert. Der erste Abdruck wird nochmals gelesen und geprüft.

Thompson stellt auch Überlegungen zum Layout der Tafel an. Zwei mal 50 Zeilen auf einer Seite beinhalten ein grosses Zahlenmaterial, dessen Lesbarkeit er durch angepasste Anordnung und Aufteilung erleichtern möchte. Er wählt Schriftart sowie Schriftgrösse geeignet aus und gruppiert die Zeilen mittels Leerzeilen und überhängenden Zifferngruppen, die in regelmässigen Abständen oder bei ihrer Änderung wiederholt werden.

Einen Ausschnitt der fertigen Logarithmentafel zeigt Bild 9. Auf jeder Seite stehen zwei solcher Aufstellungen nebeneinander. In einer Zeile folgen von links nach rechts die Numeri 5-stellig, deren Logarithmen 20-stellig sowie die zugehörigen negativen zweiten und vierten Differenzen. Falls Einträge auf 5 oder 50 usf. enden markieren ein Plus- oder Minuszeichen solche Zahlen, deren tatsächlicher Wert grösser oder kleiner ist als der ausgedruckte. Damit wird dem Benutzer angezeigt wie er bei einer Verkürzung auf weniger Stellen zu runden hat.

N, 15400—15500

N	log N	$\underline{\delta^2}$	$\underline{\delta^4}$
15450	18892 84837 60853 44725+	18 19396 45715+	4573
51	95 65925 26398 56608	9160 95944	72
52	18898 46994 72782 72546	8925 50744	71
53	18901 28046 00241 37741	8690 10116	70
54	04 09079 09009 92819	8454 74057	68
55	06 90093 99323 73840	8219 42567	67
56	09 71090 71418 12294	7984 15644	66
57	12 52069 25528 35105−	7748 93287	65−
58	15 33029 61889 64628	7513 75495−	64
59	18 13971 80737 18657	7278 62267	63
15460	18920 94895 82306 10419	18 17043 53601	4561
61	23 75801 66831 48579	6808 49497	60
62	26 56689 34548 37243	6573 49953	59
63	29 37558 85691 75954	6338 54968	58
64	32 18410 20496 59697	6103 64541	57
65	34 99243 39197 78899	5868 78670	55+
66	37 80058 42030 19431	5633 97355+	54
67	40 60855 29228 62607	5399 20595−	53
68	43 41634 01027 85189	5164 48387	52
69	46 22394 57662 59383	4929 80732	51

Bild 9: Ausschnitt der Logarithmentafel

Das Ende der Ära

Thompsons Differenzenmaschine blieb die letzte Einzelmaschine, die nur für die spezifischen Methoden der Differenzenrechnung gebaut wurde. Schon gegen Ende der zwanziger Jahre erschienen auf dem Markt handelsübliche mechanische Rechenmaschinen, die man ihrer Bauart entsprechend universeller als die Vorgängermodelle und damit auch für Berechnungen nach der Differenzenmethode einsetzen konnte. Zu dieser Gruppe zählen die National-Ellis 3000, die Burroughs Class 16 und im Besonderen die Brunsviga Dupla (Bild 10, Lit. 4). .

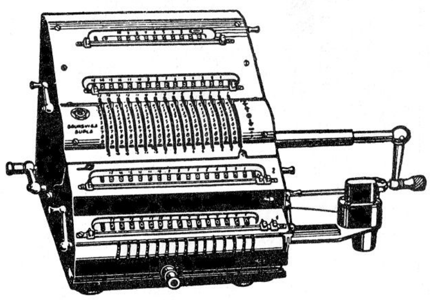


Bild 10: Brunsviga Dupla

Es dauerte nicht mehr lange und elektronische Rechner liessen Logarithmentafeln zu dem werden, was sie heute noch sind: Rechenhilfen mit historischer Bedeutung.

Anhang 1:
Reihenfolge der Veröffentlichung von Teilen der *Logarithmetica Britannica*

1924	Part IX,	Numbers	90.000 to 100.000
1927	Part VIII,	Numbers	80.000 to 90.000
1928	Part IV,	Numbers	40.000 to 50.000

1931	Part V,	Numbers	50.000	to	60.000
1933	Part VI,	Numbers	60.000	to	70.000
1934	Part I,	Numbers	10.000	to	20.000
1935	Part VII,	Numbers	70.000	to	80.000
1937	Part III,	Numbers	30.000	to	40.000
1952	Part II,	Numbers	20.000	to	30.000

Anhang 2: Inhaltsverzeichnis der *Logarithmetica Britannica* 1952

Volume I

Title-page of Brigg's Arithmetica Logarithmica, 1624
Order of Publication and Contents of the several Parts — page vi
Foreword by E. S. Pearson — vii
Prefatory Note by Karl Pearson (reprinted from Part IX, 1924) — ix
Author's Preface — xi

Introduction to Logarithmetica Britannica — xiii
I. Logarithms: Definition, Notation and Properties, §§ 1, 2 — xiii
II. Interpolation, §§ 3–14 — xiv
(i) Interpolation by the Method of Factors, §§ 4–9 — xv
(ii) Interpolation by the Method of Differences: Everett's Formula, §§ 10–12 — xxi
(iii) Interpolation by the Method of Differences: Formulae other than Everett's, § 13 — xxv
(iv) Interpolation by the Method of Lagrange, § 14 — xxvi
III. Method of Construction, §§ 15–32 — xxviii
(i) Construction of Logarithms of Numbers 50.000 to 100.000, §§ 16–29 — xxix
(ii) Construction of Logarithms of Numbers 10.000 to 50.000, § 30 — lvi
(iii) Construction of a Table of Antilogarithms, §§ 31, 32 — lvi
IV. Printing and Proof-reading, §§33, 34 — lxii
V. Acknowledgements, § 35 — lxiv
VI. References, § 36 — lxv

Appendix — lxvii
(i) Life of Henry Briggs, by Thomas Smith, 1707; translated by J. T. Foxell, M.A., F.R.A.S.
(ii) Errors in Henry Briggs' Arithmetica Logarithmica, 1624. Logarithms of Numbers 1 to 20.000 and 90.000 to 100.000 — lxxviii

Auxiliary Tables lxxxv
Table F. Factorizing Table: Logarithms of $1+N/10^7$, $1+N/10^{10}$, and $1+N/10^{13}$; $N=0(1)1000$; 21 decimals (issued with Part VIII)
Table G. Antilogarithms of logarithms 00000 00(1)00004 50; 21 decimals xcv
Table H. Short tables and constants xcviii

Main Table
Logarithms of numbers 1(1)1000; 21 decimals
Logarithms of numbers 10.000(1)50.000; 20 decimals

Volume II

Title-page and two other pages of Briggs' Logarithmorum Chilias Prima, 1617
Auxiliary Table page v
Table F. Factorizing Table: Logarithms of $1+N/10^7$, $1+N/10^{10}$, and $1+N/10^{13}$; $N=0(1)1000$; 21 decimals (repeated from Volume I)

Main Table
Logarithms of numbers 50.000(1)100.000; 20 decimals

Anhang 3:
Vergleich mit der Differenzenmaschine von Hamann 1909

Nur vierzehn Jahre bevor der erste Teil der *Logarithmetica Britannica* veröffentlicht wurde erschien das 8-stellige Tafelwerk von Bauschinger und Peters (Lit. 2). Es wurde ebenso wie die *Logarithmetica* nach der Methode der Rechnung mit Finiten Differenzen mit einer Differenzenmaschine erstellt (Lit. 12). Hersteller der Maschine war der bekannte Konstrukteur Christel Hamann in Berlin, der die Maschine in nur einem Jahr zwischen 1908 und 1909 entwarf und baute (Bild 11).

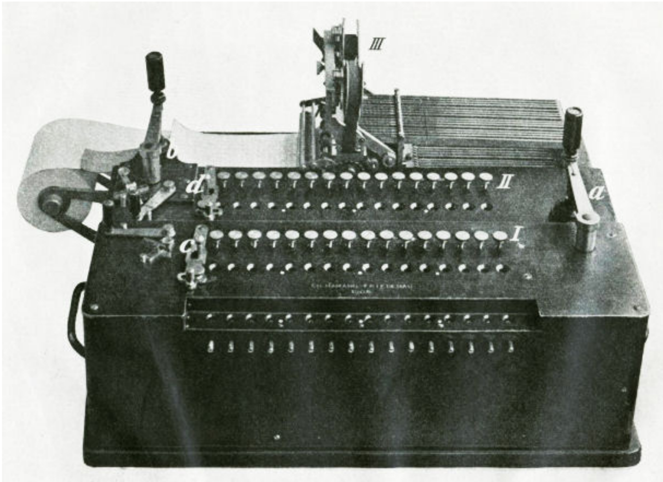


Bild 11: Die Differenzenmaschine von Hamann

Hamanns Maschine war für 16-stellige Differenzen zweiter Ordnung ausgelegt. Diese Kapazität genügte, da die Logarithmen intern mit 12 Stellen berechnet wurden. Thompson hingegen musste mit mehr als 20 Stellen rechnen und deshalb Differenzen bis zur vierten Ordnung, zuweilen sogar bis zur fünften, berücksichtigen.
Der grösste Unterschied zwischen beiden Maschinen besteht in der konstruktiven Umsetzung der Differenzenmethode. Hamanns Maschine war nämlich eine Sonderanfertigung, die von Anfang an nur für diesen einen Zweck entworfen wurde. Das war möglich, weil den Herausgebern ausreichend Geldmittel zur Verfügung standen und sie damit einen solchen Auftrag vergeben konnten.
Vor einem Durchlauf hatte man an Hamanns Maschine nur die Anfangswerte einzugeben und erhielt mit abwechselndem Drehen der beiden Kurbeln die Ergebnisse ausgedruckt. Thompson behalf sich mit der kostengünstigeren Zusammenstellung aus vorhandenen Einzelmaschinen, die zuvor umgebaut und angepasst worden waren. Der Einbau eines Druckwerks und die Automatisierung des Rechenlaufs waren in diesem Konzept nicht möglich. Zudem musste er die zu geringe Stellenzahl durch Aufteilen der Summanden kompensieren.
Obwohl beide Maschinen dem gleichen Zweck dienten waren sie dennoch grundverschieden konzipiert und aufgebaut.

Anhang 4:
Fehler in den Tafeln von Sharp und Callet

In der Tafel von Sharp (Lit. 9) findet Thompson mehrere Fehler der Grösse von einer Einheit in der letzten Stelle sowie die nachfolgend aufgelisteten:

N	Group[10]	For	Read
103	9	33496	23496
227	12	494656	495656
751	12	287788	287771
839	12	539741	538741
1009	12	382385	382285

Mit Ausnahme von log(103) sind alle Fehler dieser Tafel bei Callet (Lit 3), Ausgabe 1795 wieder enthalten. Zusätzlich nennt Thompson für Callet den falschen Wert

N	Group	For	Read
1097	12	000418	009417

In der uns vorliegenden Ausgabe Callet 1851 sind die genannten Abweichungen ebenfalls vorhanden. Später findet man noch weitere Fehler (Lit. 11).

Anhang 5:
Differenzen der Logarithmusfunktion

In der Tabelle sind die Differenzen bis zur vierten Ordnung $\delta^4\log(N)$ für die Logarithmusfunktion eingetragen. Anstelle der Stufung N−2, N−1, N, N+1,

[10] Die Mantisse ist in Gruppen zu je fünf Ziffern geteilt (vgl. Bild 8). Bei den 63-stelligen Logarithmen beginnt die Zählung mit 3 für die erste Gruppe.

N+2 der Numeri kann auch eine andere stehen (etwa N−2h, N−h, N, N+h, N+2h).

Num	**δ =**	**δ^2 =**	**δ^3 =**	**δ^4 =**
N−2				
	log(N−1)−log(N−2)			
N−1		log(N)−2log(N−1)+log(N−2)		
	log(N)−log(N−1)		δ^2log(N) −δ^2log(N−1)	
N		log(N+1)−2log(N)+log(N−1)		δ^2log(N+1)−2δ^2log(N) +δ^2log(N−1) = log(N+2)−4log(N+1)+ 6log(N)−4log(N−1)+log(N−2)
	log(N+1)−log(N)		δ^2log(N+1) −δ^2log(N)	
N+1		log(N+2)−2log(N+1)+log(N)		
	log(N+2)−log(N+1)			
N+2				

Die Differenzen sind hier auf die gleiche Weise bestimmt und eingetragen wie in der Wertetabelle des Beispiels $y = x^4$.

Bildnachweis

1 aus Biometrika Dez. 1964, vom Verfasser gekürzt

2,3,9 aus (Lit. 10)

4 vom Verfasser erstellt unter Verwendung einer Fotografie von Detlev Bölter mit dessen freundlicher Genehmigung

5 Fotos Dominik Gigler, © Department of Statistical Science, University College, London, mit freundlicher Genehmigung

6,7 vom Verfasser erstellt

8 vom Verfasser erstellt aus (Lit. 3)

10 aus (Lit. 6)

11 aus (Lit. 2)

Literatur

1 Archibald, R. C.: Mathematical Table Makers. Scripta Mathematica, New York 1948

2 Bauschinger, J. und Peters, J.(Hrsg.): Logarithmisch-trigonometrischen Tafeln mit acht Dezimalstellen, enthaltend die Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 200000 und die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen für jede Sexagesimalsekunde des Quadranten. 2 Bde., 1. Aufl. Leipzig 1910.

3 Callet, F.: Tables Portatives de Logarithmes, 1795 und weitere Ausg.

4 Comrie, L.J.: On the Application of the Brunsviga-Dupla Calculating Machine to Double Summation with Finite Differences. In: Monthly Notices of the Royal Astronomical Society (MNRAS), Vol.88, pp.447-459 (Mar 1928).

5 Glaisher, J.W.L.: Report of the Committee on Mathematical Tables. In: Report of the forty-third meeting of the British Association for the Advancement of Science. London 1874

6 Martin, E.: Die Rechenmaschinen und ihre Entwicklungsgeschichte, 1. Bd., 1925

7 Peters, J.: Zehnstellige Logarithmentafel. Erster Band. Herausgegeben von Reichsamt fur Landesaufnahme. Berlin 1922.

8 Review *Logarithmetica Britannica*. In: Journal of the Institute of Actuaries, Volume 79 (1953), Reviews II, S. 236

9 Sharp, A.: Geometry Improv(e)d, 1717

10 Thompson, A. J.: Logarithmetica Britannica, being a standard table of logarithms to twenty decimal places. Vol. 1: numbers 10.000 to 50.000, vol. 2: numbers 50.000 to 100.000. Cambridge University Press 1952

11 Uhler, H. S.: Omnibus Checking of the 61-Place Table of Denary Logarithms Compiled by Peters and Stein, by Callet, and by Parkhurst. In: Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America (PNAS) 1953, 39, 533 - 537

12 Weiss, S.: Die Differenzenmaschine von Hamann und die Berechnung der Logarithmen (2006) http://www.mechrech.info Abschn. Publikationen