Stephan Weiss

Die Differenzenmaschine von Hamann und die Berechnung der Logarithmen

Zusammenfassung

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts brachten Julius Bauschinger und Jean Peters neue, auf acht Dezimalstellen Genauigkeit berechnete Logarithmentafeln heraus. Die Bearbeiter griffen dabei auf Tafeln von Henry Briggs zurück und verwendeten ein Interpolationsverfahren, zu dessen Ausführung der Konstrukteur Christel Hamann in Berlin eine Differenzenmaschine entwarf und baute. Die Tafeln enthalten auch umfassende Beschreibungen der Rechenverfahren und der Rechenmaschine. Zusammen mit einer Simulation der Differenzenmaschine ermöglichen diese Quellen das Nachrechnen einzelner Tafelwerte unter den gleichen Randbedingungen wie ursprünglich.

Inhalt

Einführung

Logarithmentafeln waren über Jahrhunderte hinweg ein wertvolles Rechenhilfsmittel, weil man damit Berechnungen wesentlich vereinfachen konnte. Diesem Vorteil steht ein Problem gegenüber, das alle Zahlentafeln betrifft: sie müssen erst einmal berechnet werden und sie müssen fehlerfrei sein. Es liegt in der Natur der Logarithmen, dass ihre Berechnung einen grossen Aufwand erfordert. Umso mehr gilt dies für ganze Tabellen. Während der Arbeiten mit dem Zahlenmaterial, beim rechnen, abschreiben, kopieren und setzen der Lettern sind unerkannte Fehler nicht völlig auszuschliessen, sodass zudem noch eine Überprüfung auf Fehlerfreiheit notwendig wird. Falsche Zahlenwerte bringen nicht nur falsche Ergebnisse, sie können darüber hinaus personelle und materielle Verluste nach sich ziehen und niemand weiss, ob und wann dieser Fall eintreten wird. Aus dieser Problematik wird verständlich warum man immer wieder Versuche unternommen hat die Logarithmentafeln und andere Zahlentafeln von einer Maschine berechnen zu lassen (Lit. 11).
Zu Beginn des letzten Jahrhunderts veröffentlichten zwei Astronomen in Deutschland erweiterte und verbesserte Logarithmentafeln. Für die Arbeiten hierzu baute man eine mechanische Rechenmaschine, die in ihrer Funktion den notwendigen Berechnungen angepasst war.

Nachfolgend soll diese Maschine beschrieben und ihr Gebrauch an ausgewählten Beispielen demonstriert werden. Die Nachprüfung des Tafelwerkes war nicht beabsichtigt. Auf mathematische Grundlagen wird nur in dem Umfang eingegangen als dies für das Verständnis der Zusammenhänge unbedingt notwendig ist. Erläuterungen über Fehlerrechnungen sowie zu den Gleichungen, die als Basis für Interpolationen dienen, übersteigen den Rahmen des Aufsatzes. Zu Sachfragen hierüber geben Lit 7, S. 806ff. und vor allem Lit. 4, S. 11ff. Auskunft.
Logarithmentafeln werden heute nicht mehr verwendet, sie zählen zu den historischen Rechenhilfen. Anhang 1 gibt deswegen eine kurze Einführung über Logarithmen und ihre Verwendung.

Das Tafelwerk und die Maschine (1)

Im Jahr 1910 erschienen in Leipzig die

> „Logarithmisch-trigonometrischen Tafeln mit acht Dezimalstellen, enthaltend die Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 200000 und die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen für jede Sexagesimalsekunde des Quadranten“

Herausgeber des zweibändigen Werkes waren Julius Bauschinger, Direktor der Kaiserlichen Sternwarte in Strassburg, und Jean Peters, Observator des Königlich-Astronomischen Recheninstituts in Berlin. Das Werk erlebte mehrere Auflagen (Lit. 2). Wie die Herausgeber im Vorwort zum ersten Band schreiben wurden sie zu diesem Werk durch den Bedarf an genaueren Tafeln veranlasst. Den gestiegenen Anforderungen, vor allem aus Astronomie und Geodäsie, konnten siebenstellige Tafeln, Tafeln mit zu grossen Intervallen oder die Dezimalteilung des Viertelkreises nicht mehr genügen.

Erste Gespräche zwischen Julius Bauschinger und Heinrich Bruns über die neuen Tafeln legten beide 1904 in einer Denkschrift nieder (Lit. 6, Anl. XIII, S. 232). Bruns war zunächst außerordentlicher Professor für Mathematik in Berlin und danach Professor für Astronomie und Direktor der Sternwarte in Leipzig. Bei der Erstellung der Tafeln übte er eine beratende Funktion aus.
In der Denkschrift gehen beide zunächst von der Feststellung aus, dass die bisherigen Tafeln den gestiegenen Anforderungen nicht mehr genügen. Von Anfang an steht auch fest, dass eine vollständige Neuberechnung der Tafeln wegen des zu grossen Aufwands nicht in Frage kommt. Vielmehr sollen bekannte Funktionswerte mit grossen Abständen der Argumente aus bereits vorhandenen Tafelwerken entnommen werden. Die fehlenden Funktionswerte bestimmt und prüft man dann durch Interpolation mit Hilfe der Differenzenrechnung. Dazu bewerten sie bereits vorhandene Tafeln, auf die man zurückgreifen könnte und stellen Anforderungen an die neuen Tafeln hinsichtlich Anordnung und typografischer Gestaltung auf.
Das Ziel der Bearbeiter ist eine Logarithmentafel mit acht Dezimalstellen Genauigkeit der Logarithmen und mit Intervallen von einer Sekunde für die trigonometrischen Funktionen.

Beachtung verdient der angenommene Arbeitsumfang. Er umfasst neben der Herstellung des Manuskripts und der Kontrolle sowie anderer Arbeiten mehr als 400 000 mit der Hand gerechnete Interpolationen, alles in allem sollen das 12 Mannjahre bzw. 2 bis 3 Jahre mit 4 oder 6 Mitarbeitern sein. Für den Druck werden noch einmal 2 Jahre angesetzt – man stelle sich den Aufwand vor[1]. Die Gesamtkosten sind auf 22 000 Mark veranschlagt.

In der Denkschrift geht man zunächst davon aus, dass die Interpolationen mit einer selbstschreibenden Additionsmaschine von Burroughs (Bild 1) ausgeführt werden. Von einer Differenzenmaschine ist 1904 noch keine Rede, diese Idee muss erst später aufgetaucht sein. Auch verwendet man in der Denkschrift und im Vorwort der Tafeln stets nur den Begriff ‚Handrechnungen‘, eine andere Rechenmaschine wird nicht genannt. Für Berechnungen neben den eigentlichen Interpolationen kommt offensichtlich keine weitere Rechenmaschine zum Einsatz.

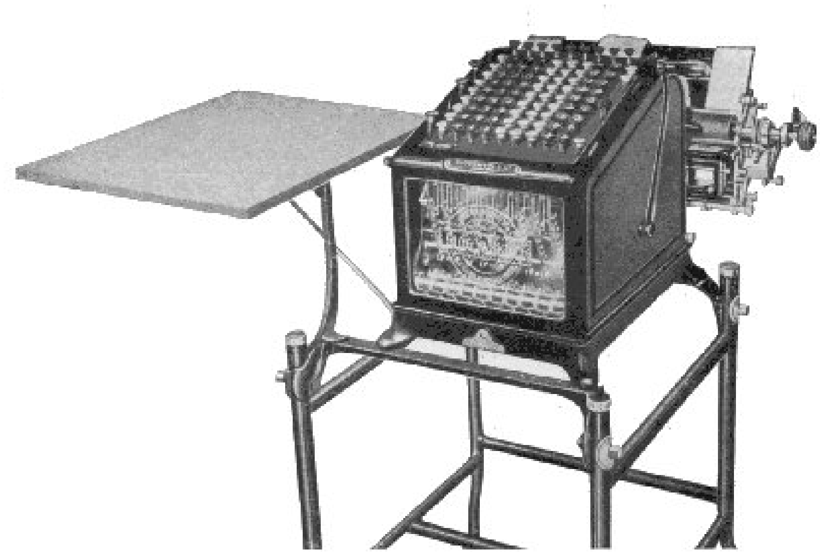


Bild 1: Burroughs selbstschreibende Additionsmaschine, um 1905

[1] Wenn man sich vergegenwärtigt dass Menschen immer wieder in jahrelanger Arbeit Logarithmen berechnet haben (Napier, Briggs und andere, s. a. Lit. 14) dann wird man an den Energieerhaltungssatz der Physik erinnert. Der hat zwar hier keine Gültigkeit, und dennoch: die Erleichterung, die Logarithmen beim Rechnen bringen, ist mit einem hohen Aufwand an zuvor geleisteter Arbeit erkauft.

Zu Beginn der für die Interpolation notwendigen Berechnungen im Frühjahr 1908, die sich mit drei bis vier (menschlichen) Rechnern über etwa ein Jahr hinziehen, wenden sich die Bearbeiter an den Konstrukteur von Rechenmaschinen Christel Hamann mit der Bitte eine Maschine zur Ausführung der Differenzenrechnungen zu entwerfen. Hamann betreibt zu dieser Zeit das Mathematisch-mechanische Institut in Friedenau und baut dort die ebenfalls von ihm entworfene und im Gesamtkonzept eigenwillige Rechenmaschine Gauss (Lit. 10 und 15). Hamann ist auch der Konstrukteur der bekannten Rechenmaschinen Mercedes-Euklid und Hamann-Manus.
Bereits ein Jahr später, Anfang 1909, liefert Hamann seine sogenannte Differenzenmaschine, die allen Erwartungen entspricht. Sie wird in nur einem Exemplar gebaut und, soweit bisher bekannt, nur zum Erstellen dieser Logarithmentafeln verwendet.
Nach den Arbeiten für die Logarithmentafeln stellt Peters die Maschine fachkundigem Publikum vor. Anlässlich der dreiundzwanzigsten ordentlichen Versammlung der Astronomischen Gesellschaft zu Breslau im September 1910 behandelt Peters „die zur Berechnung der achtstelligen Logarithmentafel verwendete Differenzenmaschine (unter praktischer Vorführung), sowie eine automatische Divisionsmaschine“ (Lit. 1, S. 19).
Das weitere Schicksal der Maschine ist unbekannt, sie gilt als verschollen.

Von Hamanns Differenzenmaschine existiert nur eine authentische Beschreibung,die auch das einzig bekannte Foto und mehrere Konstruktionszeichnungen beinhaltet. Die Beschreibung ist im Vorwort[2] des ersten Bandes der Logarithmentafeln in der ersten Auflage von 1910 abgedruckt. Es gibt jedoch keine Bedienungsanleitung oder vergleichbares. Einzelheiten zur Funktion und zur Anwendung konnten nur aus diesem Originaltext und aus dem Zweck, für den die Maschine gebaut wurde, abgeleitet werden.

Die Maschine muss sehr gross und schwer gewesen sein. Soweit sich das aus ihrem Foto rekonstruieren lässt war sie 58 Zentimeter breit, ohne Druckwerk fast 20 Zentimeter hoch und in etwa 44 Zentimeter tief. Im

[2] Das vollständige Vorwort in deutscher und englischer Sprache steht auf der Webseite des Verfassers (Adresse s. Lit. 15) zur Verfügung. Die stark gekürzte Beschreibung bei Galle (Lit. 8) hat dieses Vorwort zur Grundlage. In der zweiten Auflage der Logarithmentafeln von 1936 wird die Maschine nur erwähnt aber nicht mehr beschrieben.

Vergleich mit anderen Maschinen aus dieser Zeit ergibt sich daraus ein Gewicht um 40 Kilogramm.

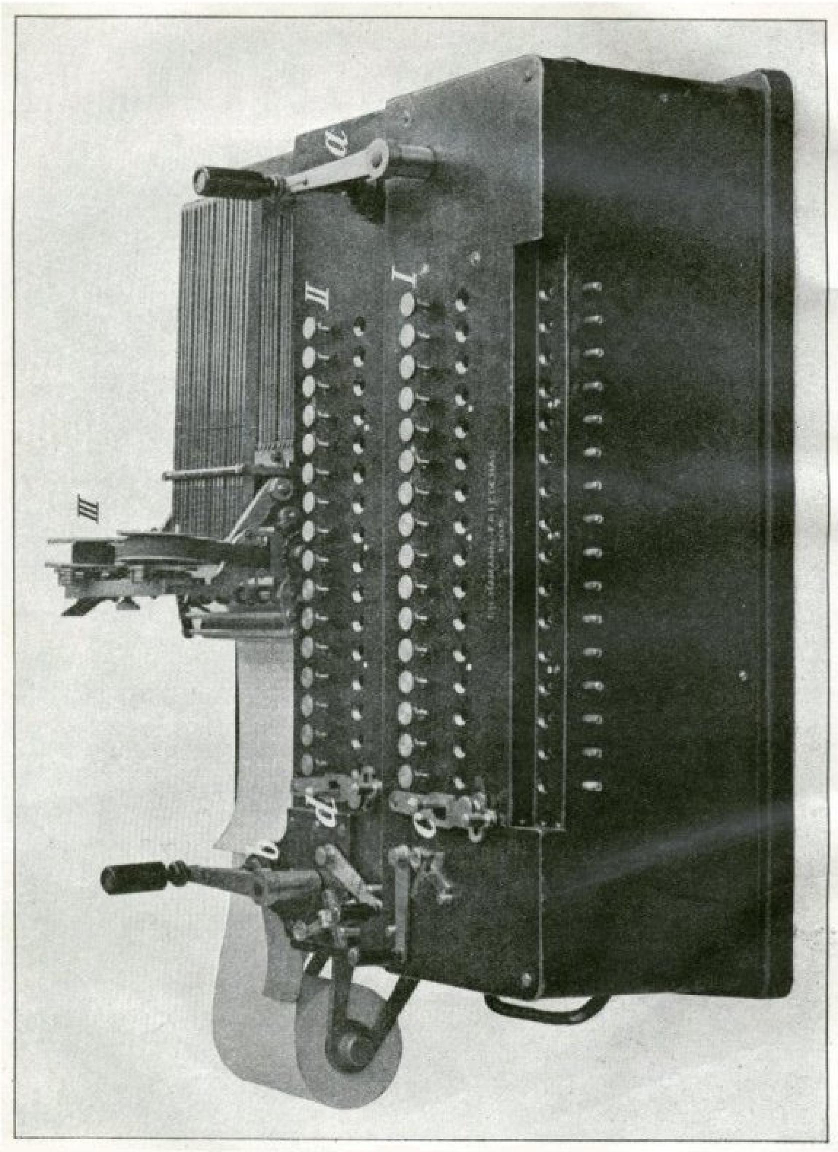


Bild 2: Die einzige Abbildung der Differenzenmaschine

Herr Eckert, der die Maschine bei Hamann zusammengebaut hat, verfasste die folgende Beschreibung. Die Abbildung der Maschine, auf die sich die Beschreibung bezieht, ist in Bild 2 wiedergegeben.

> „Die Maschine besteht aus zwei gleichartigen voneinander unabhängigen Rechenmaschinen I und II zu je 16 Stellen und dem Druckwerk III (siehe Fig. 1, Titelbild). Jede der beiden Maschinen besteht wiederum aus einem Schalt- und einem Zählwerk. Die Arbeitsweise ist folgende: Ein im Schaltwerk von I befindlicher Wert wird durch eine Drehung der Kurbel a zu dem im Zählwerk I und zugleich im Schaltwerk II befindlichen Wert hinzugelegt, und zwar entweder im positiven oder negativen Sinne, je nachdem die Maschine durch den Hebel c auf Addition oder Subtraktion geschaltet ist. Eine nunmehrige Drehung der zweiten Kurbel b legt den im Schaltwerk II stehenden Wert zu dem im Zählwerk II stehenden hinzu, ebenfalls wieder in positivem oder negativem Sinne, je nachdem der Hebel d auf Addition oder Subtraktion geschaltet ist. Durch die Drehung der Kurbel b wurde auch zugleich das zum Druckwerk gehörige Schaltwerk, entsprechend dem im Zählwerk von II stehenden Wert, eingestellt. Eine weitere Umdrehung der Kurbel a addiert bzw. subtrahiert wiederum den im Schaltwerk I stehenden Wert zu dem im Zählwerk I befindlichen, zugleich wird aber auch bei jeder Umdrehung der Kurbel a das Druckwerk betätigt, und zwar gelangt der jedesmal im Zählwerk II stehende Wert zum Abdruck."

Mit den Abkürzungen SW für Schaltwerk, ZW für Zählwerk, DW für Druckwerk und Ka sowie Kb für die Kurbeln ergibt sich aus obiger Beschreibung ein Ablaufplan, der wie aus der Sicht des Bedieners vor der Maschine von unten nach oben zu lesen ist:

↑	ZW2 in DW
Kb	SW2 ± in ZW2
↑	SW1 ± in SW2
	SW1 ± in ZW1
Ka	Ausdruck DW

Auf dem Foto der Maschine sind links unterhalb der Kurbel *b* noch zwei weitere Kurbeln zu sehen. Ihr Drehwinkel ist durch jeweils zwei Stifte begrenzt, sie werden zudem mit zwei Hebeln, die wie Morsetasten aussehen, arretiert. Der Zweck dieser Kurbeln ist unbekannt. Für Berechnungen mit der Maschine können sie keine Bedeutung gehabt haben, andernfalls wären sie im Vorwort genannt worden.

Die obige Beschreibung gibt die Sicht des Technikers wieder. Verständlicher wird sie, wenn man die Beschreibung auf den Verwendungszweck abstellt. Dazu muss man allerdings wissen, dass die Interpolationen mittels zweier Differenzen, der ersten und der zweiten Differenz, ausgeführt werden[3].
Ganz vorne an der Maschine wird die zweite Differenz an den Drehknöpfen eingestellt. Die Einstellung ist in Schaulöchern sichtbar. Dahinter wird an einer Reihe von Drehknöpfen die erste Differenz eingestellt, ihr momentaner Wert ist ebenfalls in Schaulöchern zu sehen. Noch weiter hinten stellt man den Funktionswert ein, sein momentaner Wert ist ebenfalls in Schaulöchern zu sehen. Ganz hinten ist das Druckwerk angebracht, der Papierstreifen läuft horizontal nach links heraus.
Mit Betätigen der Kurbel *Ka* rechts vorn wird der Funktionswert ausgedruckt und die zweite Differenz wird, je nach Stellung des Schalters *c*, zur ersten Differenz addiert oder von dieser subtrahiert. Bei Betätigen der Kurbel *Kb* (links hinten) wird die erste Differenz zum Funktionswert addiert oder von diesem abgezogen, je nach dem wie der Schalter *d* steht.
Das Einstellen der Differenzen und des Funktionswertes erfolgt erstmals vor jeder Reihe von Interpolationen, während der Rechnung werden nur abwechselnd die Kurbeln betätigt.

Die Maschine ist in allen Werken sechzehnstellig und für zwei Differenzen ausgelegt[4]. Man kann mit ihr nur den vorgesehenen Rechenablauf ausführen. Sie besitzt keinen verschieblichen Wagen, Multiplikationen oder Divisionen wie auf Vierspeziesmaschinen sind nicht möglich.

Bevor wir zu Beispielrechnungen mit der Maschine kommen ist noch ein Einschub erforderlich, weil mechanische Rechenmaschinen negative Zahlen auf eine besondere Art darstellen, die auch beim Arbeiten mit der Differenzenmaschine auftreten kann.

---

[3] Anhang 2 gibt eine Einführung in dieses Verfahren
[4] Die Difference Engine No.2, entworfen von Charles Babbage Mitte des 19. Jahrhunderts, ermöglicht Rechnungen bis zur siebten Differenz mit Zahlen mit einunddreissig Stellen. Dafür wiegt ihre Recheneinheit allein schon fast drei Tonnen.

Negative Zahlen in der Maschine

In mechanischen Rechenmaschinen werden negative Zahlen anders dargestellt als wir das mit einem Minuszeichen zu schreiben gewohnt sind. Der Grund liegt darin wie die meisten Rechenmaschinen den Zehnerübertrag ausführen.

Unter Zehnerübertrag versteht man eine Rechenvorschrift in unserem Zahlensystem. Sie besagt dass bei der Addition mit Erreichen oder Überschreiten von zehn auf einer Stelle an der nächst höheren Stelle links eine eins addiert werden muss. Das Gegenteil kann bei einer Subtraktion notwendig werden. Beispiele für einen Zehnerübertrag sind die Rechnungen $15 + 9 = 24$ oder $36 – 9 = 27$ oder die unvergesslichen Merksätze „sieben und sieben ist vierzehn, schreibe vier, merke eins. Eins und...“ und so weiter.

Zur Anzeige von Zahlen sind in mechanischen Rechenmaschinen an jeder Stelle Scheiben oder, wie in der Maschine von Hamann, Rollen eingebaut. Sie tragen am Umfang die Zahlen 0 bis 9. Nach 9 kommt wieder 0 (Bild 3). Der Zehnerübertrag wird wie folgt realisiert: dreht sich eine Rolle von der Position, die eine 9 anzeigt, in positivem Sinn weiter, dann wird die nächsthöhere Stelle links ebenfalls um eine Einheit weiter gedreht.

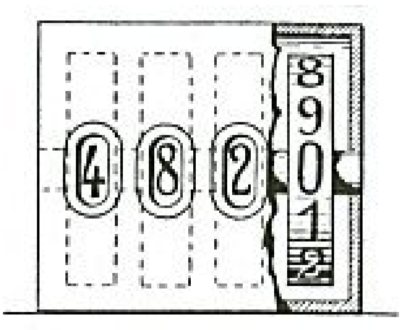


Bild 3: Rollenzählwerk

Für die Subtraktion gilt, dass dem Drehen einer Rolle im negativen Sinn über 0 hinaus das Drehen der Rolle der nächsthöheren Stelle um eine Einheit rückwärts folgen muss. Dieses Weitergeben einer Drehung, der Übertrag, kann während einer Rechenoperation auch mehrmals hintereinander notwendig werden.

An mechanischen Rechenmaschinen werden positive Zahlen mit führenden Nullen dargestellt. Subtrahiert man in den negativen Bereich hinein dann bewirkt der Mechanismus des Zehnerübertrags, dass an allen höheren Stellen nach links die 9 auftritt. Die nachfolgende Tabelle stellt positive und negative Zahlen in der linken Spalte den Repräsentationen an der Maschine in der rechten Spalte gegenüber. Dabei ist unterstellt, dass das Resultatwerk acht Stellen besitzt.

```
   3     00000003
   2     00000002
   1     00000001
   0     00000000
  -1     99999999
  -2     99999998
  -3     99999997

-127     99999873
```

Eine negative Zahl in unserer Schreibweise, ohne Vorzeichen als positiv betrachtet, und ihre Darstellung in der Maschine ergeben zusammengezählt eine 1 mit nachfolgend so vielen Nullen wie die Maschine Stellen im Ergebniswerk hat. Für die unterste Zeile in der Tabelle kann man schreiben *127 + 99 999 873 = 100 000 000*. Wegen dieses Zusammenhangs nennt man die Darstellung in der Maschine auch eine Komplementärzahl und mit Hilfe der genannten Beziehung lassen sich beide Darstellungen recht einfach ineinander umrechnen.

Das Rechnen mit Komplementärzahlen geht genauso vor sich wie mit positiven Zahlen. Beim Übergang vom negativen in den positiven Bereich kann die 1 der Summe an der Maschine jenseits der höchsten Stelle nicht mehr angezeigt werden und verschwindet.

Rechenbeispiel Polynom zweiten Grades

Wir nehmen die Demonstration der Differenzenmethode in Anhang 2 wieder auf und verwenden die Simulation der Maschine (s. Anhang 3).

Gegeben ist immer noch die Funktion $f(x) = x^2 + 2x - 7$.
Für die Argumente $x = 0, 1, 2, \ldots$ sollen alle Funktionswerte mit Hilfe der Differenzenmethode berechnet werden. Die ersten und zweiten Differenzen sind bereits ermittelt worden.

Vorne an der Maschine werden die zweite Differenz *D2 = 2*, in der Mitte der erste Wert der ersten Differenz *D1 = 3* und hinten der erste Funktionswert *f(x)= -7* eingestellt.
Die Ausgangsstellung der Maschine sieht in den Anzeigen so aus:

```
9999999999999993    (-7)
0000000000000003
0000000000000002
```

Als nächstes werden abwechselnd die Kurbeln *a* und *b* betätigt, mit der Kurbel *b* muss begonnen werden[5]. Die Anzeigen der Maschine nach jeder Kurbeldrehung sehen wie folgt aus:

Kurbel b

```
9999999999999996    (-4)
0000000000000003
0000000000000002
```

Kurbel a

```
9999999999999996    (-4)
0000000000000005
0000000000000002
```

Kurbel b

```
0000000000000001
0000000000000005
0000000000000002
```

Kurbel a

```
0000000000000001
0000000000000007
0000000000000002
```

Kurbel b

```
0000000000000008
0000000000000007
0000000000000002
```

[5] Mit welcher Kurbel man beginnt hängt von der Einstellung am Anfang ab. Verzichtet man auf den Ausdruck der ersten Funktionswerte aus der Tabelle in Anh. 2 und beginnt weiter unten mit *D2 = 2, D1 = 5* und *f(x) = 1* dann muss als erstes die Kurbel *a* betätigt werden.

Kurbel a

```
0000000000000008
0000000000000009
0000000000000002
```

Kurbel b

```
0000000000000017
0000000000000009
0000000000000002
```

Kurbel a

```
0000000000000017
0000000000000011
0000000000000002
```

Kurbel b

```
0000000000000028
0000000000000011
0000000000000002
```

Kurbel a

```
0000000000000028
0000000000000013
0000000000000002
```

Der Ausdruck der Maschine:

```
9999 9999 9999 9996
0000 0000 0000 0001
0000 0000 0000 0008
0000 0000 0000 0017
0000 0000 0000 0028
0000 0000 0000 0041
```

Das sind die ersten der gesuchten Funktionswerte, errechnet nur mit wiederholten Additionen. Der Vorgang liesse sich fortsetzen bis die Kapazität der Maschine erschöpft ist, d.h. bis das Ergebnis sechzehn Stellen überschreitet (was im übrigen hier erst bei $f(99\ 999\ 999) = 9\ 999\ 999\ 999\ 999\ 992$ der Fall wäre).

Nach dieser einfachen Vorübung kommen wir nun zu umfangreicheren Berechnungen für die Logarithmentafeln.

Rechenbeispiel Logarithmen der Zahlen

Als erstes Beispiel wählen wir die Interpolation der Zahlenlogarithmen. Die Bearbeiter greifen auf das Tafelwerk

Briggs - Gellibrand: Trigonometria Britannica. Gouda 1633

zurück. Diese Tafel enthält 14-stellige Logarithmen zu 5-stelligen Numeri.

Wie bekannt hatte Briggs von Napier die Idee der Logarithmen übernommen und sich mit ihm auf die Basiszahl 10 geeinigt.

Die Aufgabe besteht darin, dass die bei Briggs aufeinander folgenden Numeri 16950 und 16951 mittels Interpolation auf die neun Zwischenwerte 169501, 169502… bis 169510 erweitert werden.

Wir entnehmen der Tafel von Briggs die Logarithmen mit zwölf Nachkommastellen[6]

```
log 16950 = 4,2291 6970 2539
log 16951 = 4,2291 9532 3877
log 16952 = 4,2292 2094 3703
```

und bestimmen mit einer Handrechnung die ersten Differenzen[7]

```
D11 = log 16951 - log 16950 = 0,0000 2562 1338
D12 = log 16952 - log 16951 = 0,0000 2561 9826
```

und die zweite Differenz

```
D21 = D12 - D11 =  -0,0000 0000 1512
```

des grossen Intervalls.

---

[6] Für die Übernahme der Logarithmen ist die schwer zugängliche Tafel von Briggs nicht erforderlich. Mit der berechtigten Annahme dass sich dadurch nichts ändert diente als Ersatz der Rechner des Betriebssystems Windows® mit zweiunddreissig Stellen Genauigkeit.

[7] In Anlehnung an den Text in Anh. 2 bedeuten *D* oder *d* die Differenz, die erste folgende Ziffer bezeichnet die Art der Differenz (erste, zweite,…) und die zweite Ziffer ist eine fortlaufende Zählung. Andere Autoren verwenden eine präzisere, wenn auch nicht einheitliche Notation der Differenzen.

Als nächstes berechnen wir die Differenzen `d1` und `d2` des kleinen Intervalls für die Interpolation 16-stellig aus den Gleichungen (1) und (2) in Anhang 2

```
d1 =  0,0000 0256 2201 8400
d2 = -0,0000 0000 0015 1200
```

An der Maschine werden nur die Nachkommastellen eingegeben:

```
2291 6970 2539 0000   (Mantisse zu 16950)
0000 0256 2201 8400   (= d1)
0000 0000 0015 1200   (= d2, Schalter c neg.)
```

Nachdem man mit *Kb* beginnend nur die Kurbeln betätigt hat, sieht der Ausdruck der Machine so aus:

```
2291 7226 4740 8400
2291 7482 6927 5600
2291 7738 9099 1600
2291 7995 1255 6400
2291 8251 3397 0000
2291 8507 5523 2400
2291 8763 7634 3600
2291 9019 9730 3600
2291 9276 1811 2400

2291 9532 3877 0000
```

In der ersten Zeile des Ausdrucks steht die Mantisse für 169501,

```
log 169501 ≈ 5, 2291 7226 4740 84
```

darunter für 169502

```
log 169502 ≈ 5, 2291 7482 6927 56
```

usw., die letzte abgesetzte Zeile ist das schon bekannte Ergebnis für 169510.

Bild 4 zeigt den zugehörigen Ausschnitt der Tafel. Die Mantissen sind darin auf acht Stellen gekürzt.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.
16950	229 16970	17226	17483	17739	17995	18251	18508	18764	19020	19276	256
51	19532	19789	20045	20301	20557	20813	21070	21326	21582	21838	256
52	22094	22351	22607	22863	23119	23375	23631	23888	24144	24400	256
53	24656	24912	25169	25425	25681	25937	26193	26449	26706	26962	256

Bild 4: Ausschnitt der Tafel

Folgt man den Angaben der Bearbeiter dann hatten sie für die Logarithmen der Zahlen auf diesem Weg 18000 Intervalle zu rechnen.

Die Bearbeiter müssen sich bei allen Rechnungen sicher sein, dass sowohl die Tafelwerte bei Briggs als auch ihre eigenen Ergebnisse korrekt sind und nehmen deshalb Kontrollen und Fehlerabschätzungen vor.
Eine dieser Kontrollen besteht in der Prüfung, ob die mittels Interpolation gewonnene obere Intervallgrenze mit dem nächsten bekannten Tafelwert übereinstimmt, was hier für *log 169510* zutrifft. Des weiteren werden für jedes Intervall nicht nur die ersten und zweiten, sondern auch die dritten und vierten Differenzen berechnet um den Anfangswert der ersten Differenzreihe in einem Intervall vergleichen zu können mit dem Endwert der gleichen Differenzreihe im vorhergehenden Intervall. Die Beobachtung höherer Differenzen dient zudem dazu, Fehler in den Funktionswerten zu finden, weil in einem solchen Fall der „regelmässige Gang“ der Differenzen, wie Bruns (Lit. 4) es ausdrückt, gestört ist. Er meint damit starke Sprünge in der Folge der Differenzen gleicher Ordnung. All diese Kontrollen sind Handarbeit, hier kann die Differenzenmaschine nicht helfen.
Besonderes Augenmerk richten die Bearbeiter auf die dritte Differenz *D3*.

Die dritte Differenz

Neben der Maschine spielt die dritte Differenz eine zentrale Rolle bei der Berechnung der Logarithmen.
Die grundlegende Vorgehensweise der Bearbeiter besteht darin, dass sie die Intervalle für die Interpolationen klein wählen und so die Differenzen

mit höheren Ordnungen ebenfalls verkleinern. Vierte und höhere Differenzen werden dadurch zu klein, als dass sie für Funktionswerte in der gewünschten Genauigkeit eine Rolle spielen könnten. Die dritte Differenz wird ebenfalls vermindert, kann aber nicht unberücksichtigt bleiben. Ihr Einfluss auf den Funktionswert ergibt sich aus der Beziehung

$$f(a+tH) = f(a) + tD1 + \frac{(t-1)t}{2}D2 + \frac{(t-1)t(t-\frac{1}{2})}{6}D3 + \dots$$

Hierbei bedeuten

$D1$, $D2$, $D3$ die erste, zweite, dritte Differenz,
H das auf das Argument a folgende Intervall,
t Phasen (Bruchteile) des Intervalls, das interpoliert wird. Für eine zehnteilige Interpolation beispielsweise gilt $t = \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots$.

Die Bearbeiter verwenden eine selbst gefertigte Tabelle, in der zwei Werte in Abhängigkeit von t festgehalten sind: die Grösse des Koeffizienten der dritten Differenz sowie der durch Runden entstandene Summierungsfehler in der zwölften Stelle. Damit lassen sich Fehler in den Ergebnissen abschätzen. Logarithmen, deren Werte nach Abkürzung auf die achte Dezimale zweifelhaft bleiben, werden mit einer Reihenentwicklung vollständig neu gerechnet.

Rechenbeispiel Logarithmen der Winkelfunktionen

Für die Logarithmen der Winkelfunktionen greifen die Bearbeiter ebenfalls auf das Werk Briggs - Gellibrand: Trigonometria Britannica zurück.
Es enthält die Werte für sinus (15-stellig), tangens und secans (10-stellig) sowie log sin (14-stellig) und log tan (10-stellig) in Schritten des Winkels von einem einhundertstel Grad oder 36 Winkelsekunden (Lit 3 u. 9, Bild 5).

Die Bearbeiter gehen wie bei den Logarithmen der Zahlen vor und interpolieren die vorhandenen Tafelwerte bei Briggs mit 35 Zwischenwerten bzw. 36 Unterteilungen, sodass wie beabsichtigt für die neuen Werte eine Schrittweite von einer Winkelsekunde entsteht.

44. GRAD.

Centesimae	Sinus.	Tangentes.	Secantes.	Logarithmi Sinuū.	Log. Tangent.	M: S
67	70302,24326,73471	98851,66668	140613,81555	9,84696,91831,0067	9,99499,71761	40:12
	12,41114,66007	34,51503	24,26698	7,66635,1036	15,16071	
68	70314,65441,39478	98889,18171	140638,08253	9,84704,58466,1103	9,99514,87832	40:48
	12,40900,46938	34,52695	24,27965	7,66367,5275	15,16065	
69	70327,06341,86416	98923,70866	140662,36218	9,84712,24833,6378	9,99530,03897	41:24
	12,40686,24089	34,53887	24,29232	7,66100,0464	15,16060	
70	70339,47028,10505	98958,24753	140686,65450	9,84719,90933,6842	9,99545,19957	42: 0
	12,40471,97461	34,55081	24,30500	7,65832,6583	15,16054	
71	70351,87500,07966	98992,79834	140710,95950	9,84727,56766,3425	9,99560,36011	42:36
	12,40257,67055	34,56275	24,31768	7,65565,3653	15,16049	
72	70364,27757,75021	99027,36109	140735,27718	9,84735,22331,7078	9,99575,52060	43:12
	12,40043,32870	34,57469	24,33038	7,65298,1666	15,16043	
73	70376,67801,07891	99061,93578	140759,60756	9,84742,87629,8744	9,99590,68103	43:48
	12,39828,91003	34,58666	24,34309	7,65031,0621	15,16039	

Bild 5: Ausschnitt der Trigonometria Britannica

In Handrechnungen, die der Vorbereitung für den Einsatz der Differenzenmaschine dienen, bestimmt man zur Kontrolle der Tafelwerte die Differenzen bis zur vierten Ordnung sowie die Differenzen für die Ein-Sekunden-Intervalle. Dann kommt die Maschine zum Einsatz.

Wir besitzen die Kopie eines Ausdrucks der Maschine (Bild 6). Er entstand mit dem Anfangswert

```
log tan 34°09'36'' = 9,8316 0055 2725 - 10
```

und der ersten Differenz

```
d1 =  0,0000 0453 1587 2928
```

sowie der zweiten Differenz

```
d2 = -0,0000 0000 0017 4580
```

für das interpolierte Intervall *log tan 34°09'36"* bis *log tan 34°10'12"*.

Die letzte Zeile unten entspricht dem Zahlenwert

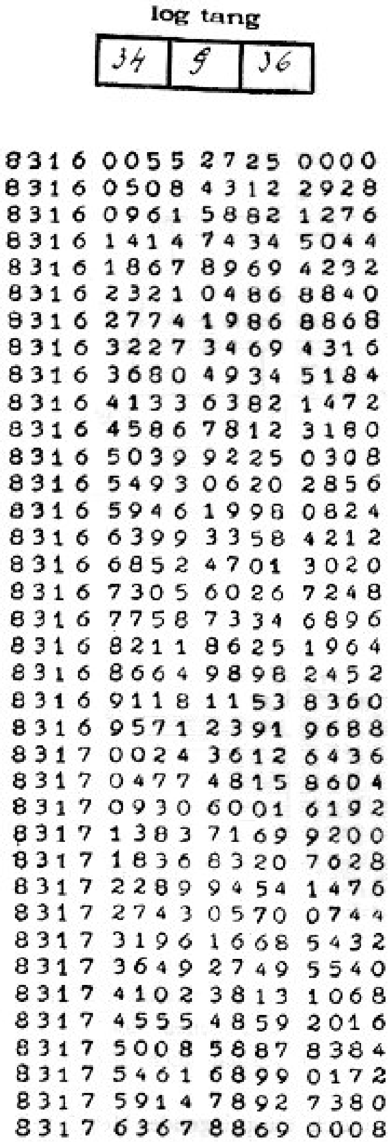
```
log tan 34°10'12'' = 9,8317 6367 8869 2003 - 10
```

Mit der Ausgangsstellung der Maschine

```
    8316 0055 2725 0000
```

```
0000 0453 1587 2928
0000 0000 0017 4580   (Schalter c neg.)
```

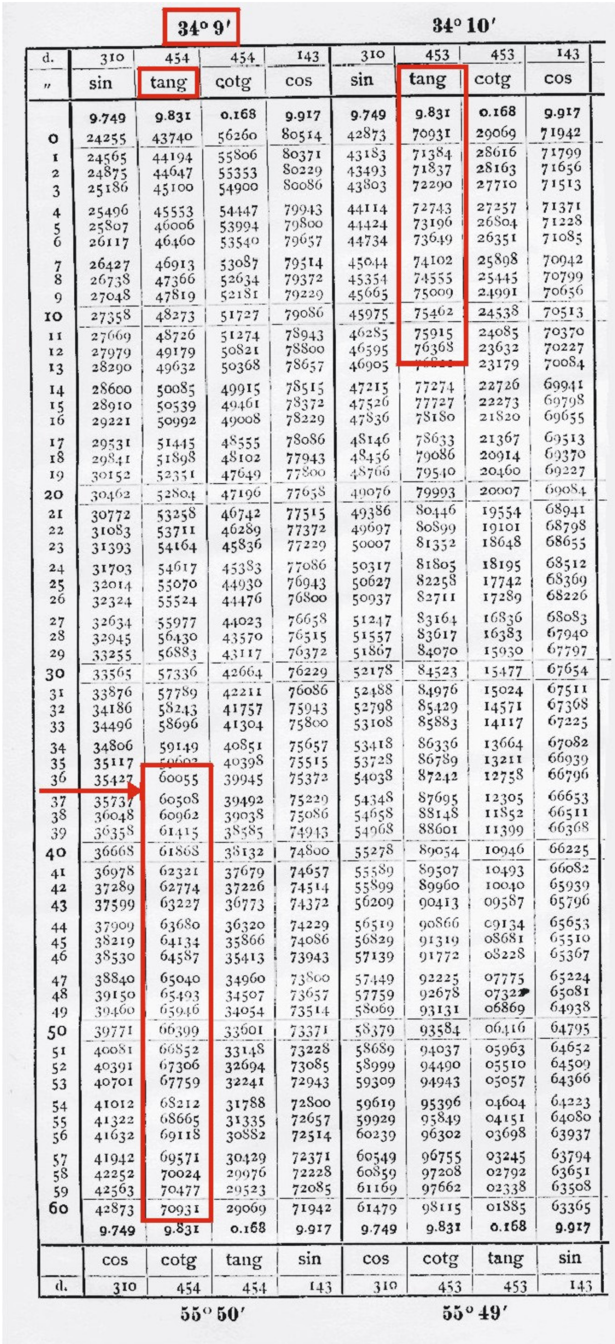
lässt sich der Maschinenausdruck reproduzieren.
Bild 7 zeigt den entsprechenden Ausschnitt der gedruckten Tafel, reduziert auf acht Stellen.


log tang

34	9	36

```
8316 0055 2725 0000
8316 0508 4312 2928
8316 0961 5882 1276
8316 1414 7434 5044
8316 1867 8969 4232
8316 2321 0486 8840
8316 2774 1986 8868
8316 3227 3469 4316
8316 3680 4934 5184
8316 4133 6382 1472
8316 4586 7812 3180
8316 5039 9225 0308
8316 5493 0620 2856
8316 5946 1998 0824
8316 6399 3358 4212
8316 6852 4701 3020
8316 7305 6026 7248
8316 7758 7334 6896
8316 8211 8625 1964
8316 8664 9898 2452
8316 9118 1153 8360
8316 9571 2391 9688
8317 0024 3612 6436
8317 0477 4815 8604
8317 0930 6001 6192
8317 1383 7169 9200
8317 1836 8320 7628
8317 2289 9454 1476
8317 2743 0570 0744
8317 3196 1668 5432
8317 3649 2749 5540
8317 4102 3813 1068
8317 4555 4859 2016
8317 5008 5887 8384
8317 5461 6899 0172
8317 5914 7892 7380
8317 6367 8869 0008
```

Bild 6: ein originaler Maschinenausdruck



	34° 9′				34° 10′			
d.	310	454	454	143	310	453	453	143
″	sin	tang	cotg	cos	sin	tang	cotg	cos
	9.749	9.831	0.168	9.917	9.749	9.831	0.168	9.917
0	24255	43740	56260	80514	42873	70931	29069	71942
1	24565	44194	55806	80371	43183	71384	28616	71799
2	24875	44647	55353	80229	43493	71837	28163	71656
3	25186	45100	54900	80086	43803	72290	27710	71513
4	25496	45553	54447	79943	44114	72743	27257	71371
5	25807	46006	53994	79800	44424	73196	26804	71228
6	26117	46460	53540	79657	44734	73649	26351	71085
7	26427	46913	53087	79514	45044	74102	25898	70942
8	26738	47366	52634	79372	45354	74555	25445	70799
9	27048	47819	52181	79229	45665	75009	24991	70656
10	27358	48273	51727	79086	45975	75462	24538	70513
11	27669	48726	51274	78943	46285	75915	24085	70370
12	27979	49179	50821	78800	46595	76368	23632	70227
13	28290	49632	50368	78657	46905	[illegible]	23179	70084
14	28600	50085	49915	78515	47215	77274	22726	69941
15	28910	50539	49461	78372	47526	77727	22273	69798
16	29221	50992	49008	78229	47836	78180	21820	69655
17	29531	51445	48555	78086	48146	78633	21367	69513
18	29841	51898	48102	77943	48456	79086	20914	69370
19	30152	52351	47649	77800	48766	79540	20460	69227
20	30462	52804	47196	77658	49076	79993	20007	69084
21	30772	53258	46742	77515	49386	80446	19554	68941
22	31083	53711	46289	77372	49697	80899	19101	68798
23	31393	54164	45836	77229	50007	81352	18648	68655
24	31703	54617	45383	77086	50317	81805	18195	68512
25	32014	55070	44930	76943	50627	82258	17742	68369
26	32324	55524	44476	76800	50937	82711	17289	68226
27	32634	55977	44023	76658	51247	83164	16836	68083
28	32945	56430	43570	76515	51557	83617	16383	67940
29	33255	56883	43117	76372	51867	84070	15930	67797
30	33565	57336	42664	76229	52178	84523	15477	67654
31	33876	57789	42211	76086	52488	84976	15024	67511
32	34186	58243	41757	75943	52798	85429	14571	67368
33	34496	58696	41304	75800	53108	85883	14117	67225
34	34806	59149	40851	75657	53418	86336	13664	67082
35	35117	[illegible]	40398	75515	53728	86789	13211	66939
36	35427	60055	39945	75372	54038	87242	12758	66796
37	35737	60508	39492	75229	54348	87695	12305	66653
38	36048	60962	39038	75086	54658	88148	11852	66511
39	36358	61415	38585	74943	54968	88601	11399	66368
40	36668	61868	38132	74800	55278	89054	10946	66225
41	36978	62321	37679	74657	55589	89507	10493	66082
42	37289	62774	37226	74514	55899	89960	10040	65939
43	37599	63227	36773	74372	56209	90413	09587	65796
44	37909	63680	36320	74229	56519	90866	09134	65653
45	38219	64134	35866	74086	56829	91319	08681	65510
46	38530	64587	35413	73943	57139	91772	08228	65367
47	38840	65040	34960	73800	57449	92225	07775	65224
48	39150	65493	34507	73657	57759	92678	0732[illegible]	65081
49	39460	65946	34054	73514	58069	93131	06869	64938
50	39771	66399	33601	73371	58379	93584	06416	64795
51	40081	66852	33148	73228	58689	94037	05963	64652
52	40391	67306	32694	73085	58999	94490	05510	64509
53	40701	67759	32241	72943	59309	94943	05057	64366
54	41012	68212	31788	72800	59619	95396	04604	64223
55	41322	68665	31335	72657	59929	95849	04151	64080
56	41632	69118	30882	72514	60239	96302	03698	63937
57	41942	69571	30429	72371	60549	96755	03245	63794
58	42252	70024	29976	72228	60859	97208	02792	63651
59	42563	70477	29523	72085	61169	97662	02338	63508
60	42873	70931	29069	71942	61479	98115	01885	63365
	9.749	9.831	0.168	9.917	9.749	9.831	0.168	9.917
	cos	cotg	tang	sin	cos	cotg	tang	sin
d.	310	454	454	143	310	453	453	143
	55° 50′				55° 49′			

Bild 7: Ausschnitt der Tafel für Winkelfunktionen

Die Logarithmen der Winkelfunktionen sinus und cosinus bestimmt man auf dem gleichen Weg, cotangens ebenfalls, diese jedoch mit den Differenzen des Einsekundenintervalls von tangens.

Für Winkel bis 5 Grad kommt ein Verfahren zur Anwendung, das in folgenden Schritten abläuft:

- der Tafel von Briggs - Gellibrand werden von 36" zu 36" die Werte von log sin, log cos entnommen und daraus mit Hilfe der Zahlenlogarithmen die Hilfsgrössen
  `S = log sin - log arc` und
  `T =    S    - log cos`
  zwölfstellig berechnet,
- zu allen Grössen *S* und *T* werden weiterhin ihre Differenzen bestimmt, damit man sie dann
- auf eine Schrittweite von 1" interpolieren kann. Nur hier kommt die Maschine zum Einsatz.
- Zu allen neuen Werten von *S* und *T* addiert man nun wieder in Handrechnungen log arc und erhält so log sin und log cos sowie log tan aus
  `log tan = log sin - log cos.`
- Für log cot wird im Druckmanuskript die dekadische Ergänzung zu log tan eingetragen.

Wie bei den Logarithmen der Zahlen betreffen Kontrollen den Summationsfehler, der bei der wiederholten Addition von gerundeten Zahlenwerten entsteht sowie die mit der Maschine vernachlässigte dritte Differenz. Hierzu bedienen sich die Bearbeiter wiederum einer Tabelle, mit deren Hilfe sich der Einfluss der unterschiedlichen Fehlerarten auf die zwölfte Stelle des Egebnisses abschätzen lässt. Stellt sich heraus, dass bei Abkürzung auf die achte Dezimale diese zweifelhaft bleibt, wird der Funktionswert über seine Reihenentwicklung vollständig neu errechnet, und das, ebenfalls zur Kontrolle, gleich zwei mal.

Die Abfolge der Arbeitsschritte bei der Berechnung der Winkelfunktionen macht deutlich, wieviel Arbeit mit Hand und Kopf trotz des Einsatzes der Differenzenmaschine geleistet werden muss. Die Tafel der Winkelfunktionen umfasst 17000 Intervalle.

Das Tafelwerk und die Maschine (2)

Über das Ergebnis ihrer Arbeit schreiben die Herausgeber:

> „Das durch die Maschine direkt gelieferte Material stellt eine große zwölfstellige Tafel in einem Intervall dar, wie es bis jetzt noch nirgends vorliegt; die zwölfte Dezimale ist zwar wegen der Vernachlässigung der dritten Differenzen nicht durchweg gesichert, kann aber durch eine verhältnismäßig kleine Rechnung bis auf rund eine Einheit festgestellt werden. Wenn diese Tafel auch nicht gedruckt werden kann, so wird sie sich doch für viele Zwecke als überaus nützlich erweisen; wir haben daher für ihren wohlgeordneten Zustand, der ein sofortiges Auffinden des einzelnen Wertes gestattet, Sorge getragen und sie in Kapseln, die in einem großen Aktenschrank aufgestellt sind, dem Astronomischen Recheninstitut in Berlin zur ständigen Aufbewahrung übergeben."

Was mit den Kapseln weiter geschehen ist weiss niemand.

Lässt man die rechentechnischen Verfahren beiseite, dann fallen bei der Beschäftigung mit der Entstehungsgeschichte des Tafelwerkes einige Merkmale auf.
Das Werk baut auf einer wesentlich älteren Tafel auf, die noch von Henry Briggs, dem Begründer den Logarithmen zur Basis zehn stammt. Genau genommen wird dessen Tafel durch das Verfahren der Interpolation erweitert, nicht ersetzt. Es wäre demnach falsch, die alte Tafel als nur historisch im Sinne von überholt und ohne Bezug zu den neueren Tafeln zu sehen.
Aus den Erfordernissen der Wissenschaft ergab sich eine Dringlichkeit für das Erstellen neuer Tafeln mit grösserer Genauigkeit. Persönlicher Ehrgeiz vor der Herausforderung mag zusätzlich mit im Spiel gewesen sein. Solchen Motivationen folgen mitunter grosse Anstrengungen. Und dennoch ist man überrascht vom enormen Arbeitsaufwand über Jahre hinweg, ganz zu schweigen von den organisatorischen Anstrengungen und von den Kosten, die ebenfalls nicht übersehen werden dürfen.
Die Interpolation der Tafelwerte stützt sich auf ein Rechenverfahren, das man mit einer nur für diesen Zweck gebauten Maschine ausgeführt hat. Diese Maschine brachte mit Sicherheit eine Verringerung der Rechenarbeit mit sich. Sie benötigt jedoch Handrechnungen als Vorbereitung und kann nur unter diesen Randbedingungen eingesetzt werden. Ihre

Ergebnisse müssen zudem kontrolliert und übertragen werden. Der Anteil der Maschinenarbeit an der gesamten Rechenarbeit ist geringer als man zunächst annehmen könnte.

Die Herausgeber sprechen mit einem gewissen Stolz von ihrer Arbeit. Eines konnten sie nicht voraussehen: ein dreiviertel Jahrhundert später liess die neue Technologie der Mikroelektronik die Logarithmentafeln, und damit auch ihre Arbeit, nutzlos werden.

Anhang 1: Logarithmen

Der Logarithmus ist eine Zahl, die nur in Verbindung mit zwei weiteren Zahlen eine Bedeutung hat: der Numerus und die Basis. Als Basis wird meistens 10 gewählt, daher leitet sich auch die Bezeichnung Zehnerlogarithmen ab. Im Tafelwerk von Bauschinger und Peters ist die Basis ebenfalls 10 und wird deshalb hier nicht weiter genannt. Der Numerus ist die Zahl, deren Logarithmus bestimmt werden soll

Der Logarithmus setzt sich zusammen aus der Kennziffer, das ist die Ziffer links vom Komma, und der Mantisse mit ihren Ziffern rechts vom Komma.
Die Grösse der Kennziffer ist davon abhängig zwischen welchen Zehnerpotenzen der Numerus liegt. Sie beträgt

-1	für Numeri gleich oder grösser	0,1	und kleiner als	1
0		1		10
1		10		100
2		100		1000

und so weiter.

Ein Beispiel:
log 2,81 = 0,4487
log 281 = 2,4487 (4487 ist die Mantisse)

Die Numeri und ihre Mantissen werden tabellarisch und damit übersichtlich in Logarithmentafeln zusammengefasst. Mit Ausnahme von sehr frühen Tafeln sind die Numeri von oben nach unten angeordnet, ihre letzten Ziffern stehen oben und unten waagerecht. Mit dieser Anodnung erreicht man eine platzsparende zweidimensionale Aufteilung

Der Vorteil von Logarithmen liegt darin, dass sie die Rechenarbeit vereinfachen. Man mit ihrer Hilfe Multiplikationen oder Divisionen der Numeri durch Additionen bzw. Subtraktionen ihrer Logarithmen ausführen. Ebenso ist das Potenzieren der Numeri durch die Multiplikation der Logarithmen ersetzbar. In Formeln kommen zuweilen Multiplikationen oder Divisionen mit Winkelfunktionen vor. Es ist deshalb von Vorteil, wenn man die Werte der Winkelfunktionen ebenfalls als Logarithmen besitzt.
Alle Rechenregeln mit Logarithmen lassen sich mit Hilfe der Potenzgesetze begründen.

Ein einfaches Rechenbeispiel für eine Multiplikation demonstriert den Gebrauch der Logarithmen und einer Logarithmentafel: es soll
11 × 1,22 berechnet werden.

N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	00 000	043	087	130	173	217	260	303	346	389
101	432	475	518	561	604	647	689	732	775	817
102	860	903	945	988	*030	*072	*115	*157	*199	*242
103	01 284	326	368	410	452	494	536	578	620	662
104	703	745	787	828	870	912	953	995	*036	*078
105	02 119	160	202	243	284	325	366	407	449	490
106	531	572	612	653	694	735	776	816	857	898
107	938	979	*019	*060	*100	*141	*181	*222	*262	*302
108	03 342	383	423	463	503	543	583	623	663	703
109	743	782	822	862	902	941	981	*021	*060	*100
110	04 139	179	218	258	297	336	376	415	454	493
111	532	571	610	650	689	727	766	805	844	883
112	922	961	999	*038	*077	*115	*154	*192	*231	*269
113	05 308	346	385	423	461	500	538	576	614	652
114	690	729	767	805	843	881	918	956	994	*032
115	06 070	108	145	183	221	258	296	333	371	408
116	446	483	521	558	595	633	670	707	744	781
117	819	856	893	930	967	*004	*041	*078	*115	*151
118	07 188	225	262	298	335	372	408	445	482	518
119	555	591	628	664	700	737	773	809	846	882
120	918	954	990	*027	*063	*099	*135	*171	*207	*243
121	08 270	314	350	386	422	458	493	529	565	600
122	636	672	707	743	778	814	849	884	920	955
123	991	*026	*061	*096	*132	*167	*202	*237	*272	*307
124	09 342	377	412	447	482	517	552	587	621	656
125	691	726	760	795	830	864	899	934	968	*003
126	10 037	072	106	140	175	209	243	278	312	346
127	380	415	449	483	517	551	585	619	653	687
128	721	755	789	823	857	890	924	958	992	*025
129	11 059	093	126	160	193	227	261	294	327	361
130	394	428	461	494	528	561	594	628	661	694
131	727	760	793	826	860	893	926	959	992	*024
132	12 [illegible]	[illegible]	[illegible]	156	189	222	254	287	320	352
133	385	418	450	483	516	548	581	613	646	678
134	[illegible]	[illegible]	775	808	840	872	905	937	969	*001
135	13 033	066	[illegible]	130	162	194	226	258	290	322
136	354	386	418	450	481	513	545	577	609	640
137	672	704	735	767	799	830	862	893	925	956
138	988	*019	*051	*082	*114	*145	*176	*208	*239	*270
139	14 301	333	364	395	426	457	489	520	551	582
140	613	644	675	706	737	768	799	829	860	891
141	922	953	983	*014	*045	*076	*106	*137	*168	*198
142	15 229	259	290	320	351	381	412	442	473	503
143	534	564	594	625	655	685	715	746	776	806
144	836	866	897	927	957	987	*017	*047	*077	*107
145	16 137	167	197	227	256	286	316	346	376	406
146	435	465	495	524	554	584	613	643	673	702
147	732	761	791	820	850	879	909	938	967	997
148	17 026	056	085	114	143	173	202	231	260	289
149	319	348	377	406	435	464	493	522	551	580
150	609	638	667	696	725	754	782	811	840	869
N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P. P.

	44	**43**	**42**
1	4,4	4,3	4,2
2	8,8	8,6	8,4
3	13,2	12,9	12,6
4	17,6	17,2	16,8
5	22,0	21,5	21,0
6	26,4	25,8	25,2
7	30,8	30,1	29,4
8	35,2	34,4	33,6
9	39,6	38,7	37,8

	41	**40**	**39**
1	4,1	4,0	3,9
2	8,2	8,0	7,8
3	12,3	12,0	11,7
4	16,4	16,0	15,6
5	20,5	20,0	19,5
6	24,6	24,0	23,4
7	28,7	28,0	27,3
8	32,8	32,0	31,2
9	36,9	36,0	35,1

	38	**37**	**36**
1	3,8	3,7	3,6
2	7,6	7,4	7,2
3	11,4	11,1	10,8
4	15,2	14,8	14,4
5	19,0	18,5	18,0
6	22,8	22,2	21,6
7	26,6	25,9	25,2
8	30,4	29,6	28,8
9	34,2	33,3	32,4

	35	**34**	**33**
1	3,5	3,4	3,3
2	7,0	6,8	6,6
3	10,5	10,2	9,9
4	14,0	13,6	13,2
5	17,5	17,0	16,5
6	21,0	20,4	19,8
7	24,5	23,8	23,1
8	28,0	27,2	26,4
9	31,5	30,6	29,7

	32	**31**	**30**
1	3,2	3,1	3,0
2	6,4	6,2	6,0
3	9,6	9,3	9,0
4	12,8	12,4	12,0
5	16,0	15,5	15,0
6	19,2	18,6	18,0
7	22,4	21,7	21,0
8	25,6	24,8	24,0
9	28,8	27,9	27,0

Bild 8: Rechenbeispiel 11 x 1,22

In der Tafel finden wir neben dem Numerus 1100 die Ziffernfolge 04139 (führende Ziffern die sich über mehrere Mantissen hinweg nicht ändern sind nur einmal angegeben). Da 11 zwischen 10 und 100 liegt ist die Kennziffer eine 1.

```
log 11    = 1,04139
```

Neben dem Numerus 1220 finden wir die Ziffernfolge 08636. Da 1,22 zwischen 1 und 10 liegt ist die Kennziffer eine 0.

```
log 1,22  = 0,08636
```

Nach dem Addieren der Logarithmen ergibt sich

```
1,04139 + 0,08636 = 1,12775
```

In der Tafel suchen wir die Ziffernfolge 12775 und finden dazu links und oben die Ziffernfolgen 1342. Die Kennziffer ist 1, d.h. das Ergebnis muss grösser als 10 sein, es lautet $11 \times 1{,}22 = 13{,}42$.

Ihrem Vorteil steht ein Nachteil der Logarithmen gegenüber: sie erlauben eine nur beschränkte Genauigkeit im Ergebnis, die umso besser wird, je mehr Stellen der Mantisse angegeben sind. Die Tafel des Rechenbeispiels gibt fünfstellige Mantissen, Bauschinger und Peters wollten wegen der höheren Anforderungen an die Genauigkeit eine achtstellige Tafel.

Anhang 2: Die Differenzenmethode

Das mathematische Verfahren der Differenzenmethode ermöglicht uns, Funktionswerte eines Polynoms für aufeinander folgende Argumente mit gleichen Abständen nur durch fortgesetzte Addition zu berechnen. Für dieses Rechenverfahren und nur für dieses ist die Differenzenmaschine von Hamann gebaut worden. Ein einfaches Rechenbeispiel soll die Methode verdeutlichen.

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 + 2x - 7$
Für die Argumente $x = 0, 1, 2,...$ sollen die Funktionswerte $f(x)$ mit Hilfe der Differenzenmethode berechnet werden.

Zunächst wird eine Tabelle erstellt. In der linken Spalte stehen untereinander die Argumente *x = 0, 1, 2,….* Die Schrittweite für x ist hier $\Delta x = 1$.
In die nächste Spalte rechts daneben schreibt man einige errechnete Funktionswerte *f(0) = -7, f(1) = -4, f(2) = 1* usw.

Als nächstes werden die ersten Differenzen berechnet und in die Spalte D1 eingetragen. Sie errechnen sich aus einem Funktionswert minus dem vorhergehenden, also $f(x + \Delta x) - f(x)$. In unserem Beispiel ergeben sich die ersten Differenzen *D1: -4 – (-7) = 3* sowie *1 – (-4) = 5* und *8 – 1 = 7.*

In der nächsten Spalte D2 werden die zweiten Differenzen eingetragen. Sie errechnen sich wiederum aus dem Wert einer ersten Differenz minus dem Wert der vorhergehenden ersten Differenz. Wir erhalten die zweiten Differenzen *D2* zu *5 – 3 = 2* und *7 – 5 = 2*. Die zweiten Differenzen sind in diesem Beispiel konstant, die dritten und alle höheren Differenzen haben den Wert null[8].

x	f(x)	D1	D2
0	-7		
		3	
1	-4		2
		5	
2	1		2
		7	
3	8		2
		9	
4	17		

Man kann nun das Schema zur Beschriftung der Tafel umkehren und alle folgenden Funktionswerte mit fortgesetzten Additionen bestimmen:

[8] Die höchste Potenz von x bestimmt den Grad des Polynoms. Dem Rechenbeispiel liegt demnach ein Polynom zweiten Grades zu Grunde. Allgemein gilt, dass für ein Polynom des Grades n die n-ten Differenzen konstant und alle höheren null sind.

$D2 = 2$ addiert zu $D1 = 5$ ergibt $D1 = 7$
$D1 = 7$ addiert zu $f(x) = 1$ ergibt $f(x) = 8$
$D2 = 2$ addiert zu $D1 = 7$ ergibt $D1 = 9$
$D1 = 9$ addiert zu $f(x) = 8$ ergibt $f(x) = 17$
und so fort.

Dieses Beispiel wird weiter vorn bei den Rechnungen mit der Maschine weitergeführt.

Es gibt noch ein weiteres ähnliches Verfahren, mit dessen Hilfe man neue Funktionswerte zwischen zwei vorgegebene Funktionswerte einfügen kann. Man nennt diesen Vorgang interpolieren. Bauschinger und Peters greifen bei der Berechnung ihrer Tafeln darauf zurück und verweisen auf einen Abschnitt in der Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften von 1900, der in Anhang 4 wiedergegeben ist. Darin werden auch zwei Rechenbeispiele gegeben.
Vereinfacht ausgedrückt lassen sich aus den bekannten ersten, zweiten und höheren Differenzen *D1, D2, D3…* neue erste, zweite und höhere Differenzen *d1, d2, d3…* berechnen. Mit Hilfe dieser neuen Differenzen *d1, d2, d3…* kann man nun auf die gleiche Weise wie bereits oben beschrieben neue Funktionswerte mit konstanter Schrittweite zwischen zwei bereits vorhandene einfügen.

In der Tafel von Bauschinger und Peters sind zwei unterschiedliche Interpolationen notwendig: einmal eine Interpolation mit neun Zwischenwerten für die Logarithmen der Zahlen sowie eine Interpolation mit fünfunddreissig Zwischenwerten für die Logarithmen der Winkelfunktionen. Mit den Parametern $r = 4$ und $m = 10$ bzw. $m = 36$ zu den Ableitungen in Anhang 4, S. 814 errechnen sich die Differenzen

für die 9-teilige Interpolation zu

(1) $$d2 = 0{,}01 \cdot D2 + \ldots$$

(2) $$d1 = 0{,}1 \cdot D1 - 0{,}045 \cdot D2 + \ldots$$

und für die 35-teilige Interpolation zu

(3) $$d2 = \frac{1}{36^2} \cdot D2 + \ldots$$

(4) $$d1 = \frac{1}{36} \cdot D1 - \frac{35}{2 \cdot 36^2} \cdot D2 + \ldots$$

Die drei Auslassungspunkte in den Gleichungen oben weisen darauf hin, dass höhere Differenzen *D3, D4* usw. mit ihren Koeffizienten ebenfalls in die Werte von *d1* und *d2* eingehen, sofern sie nicht Null sind. Diese Glieder sind hier jedoch nicht mit aufgeführt, weil die Differenzenmaschine nur mit der ersten und der zweiten Differenz rechnet.

Logarithmische Funktionen oder Winkelfunktionen kann man auf diesem Weg nicht berechnen, weil sie zu den transzendenten Funktionen gehören. Wenn man es trotzdem macht treten Fehler in den Ergebnissen auf. Sofern man allerdings diese Fehler unter Kontrolle hat und abschätzen kann lassen sich auch Winkelfunktionen und Logarithmen mit einem vorgegebenen tolerierbaren Fehler berechnen. Genau so sind Bauschinger und Peters bei der Erstellung ihrer Logarithmentafeln vorgegangen. Sie interpolieren kleine Intervalle und rechnen mit nur zwei Differenzen, prüfen aber stets den Fehler, der mit Vernachlässigung der dritten Differenz auftritt.

Solche Verfahren haben einen grossen Vorteil: die aufwendige Berechnung von einzelnen Funktionswerten wird auf fortgesetzte einfache Additionen oder Subtraktionen reduziert. Der Nachteil besteht darin, dass ein einmal gemachter Rechenfehler sich immer weiter fortsetzt. Die Einfachheit des Differenzenverfahrens mit seinen immer wiederkehrenden gleichen Abläufen legt nahe, hierfür eine besondere Additionsmaschine zu bauen, die die Ergebnisse am besten auch gleich ausdruckt. Diese Idee liegt allen Differenzenmaschinen zugrunde.

Anhang 3: Die Simulation der Differenzenmaschine

Das Nachrechnen von Intervallen aus den Logarithmentafeln unter den ursprünglichen Bedingungen kann die Methode und vor allem den Arbeitsaufwand weitaus besser vermitteln als jede Erklärung. Ich habe daher eine Simulation der Differenzenmaschine von Hamann programmiert (Bild 9). Die Simulation läuft mit dem Player 6 von Macromedia Flash® und steht auf meiner Webseite zur Verfügung. Simulationen unterliegen wie Programme einer Weiterentwicklung, weshalb sich zukünftig Details der Grafik oder der Bedienung ändern können.

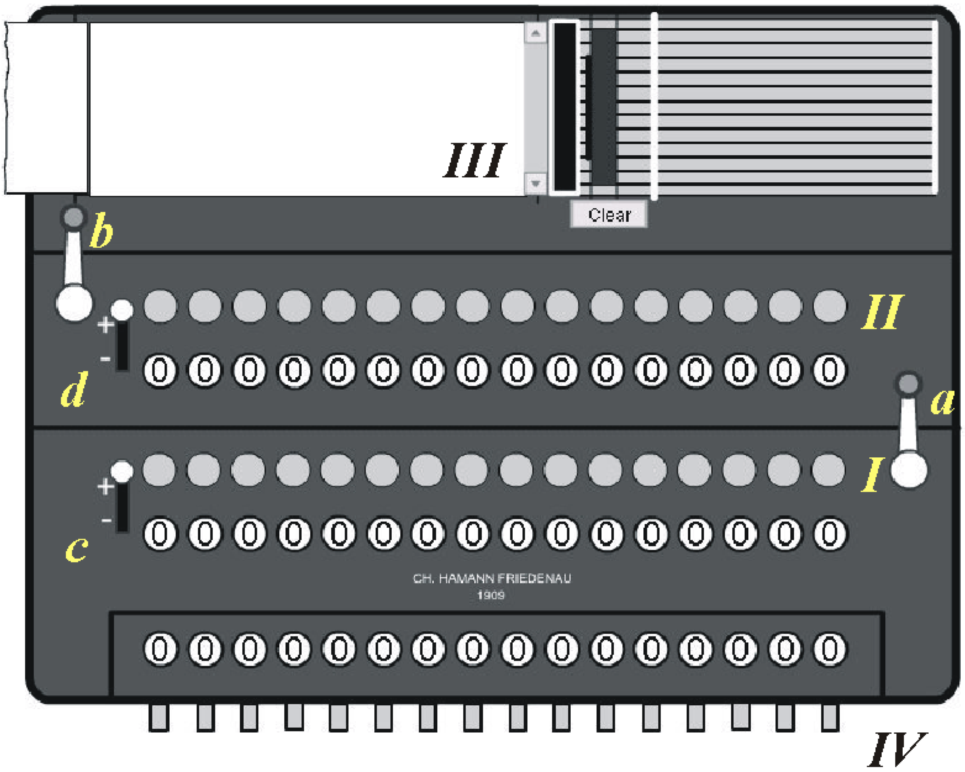


Bild 9: Die Simulation der Differenzenmaschine

Die grafische Ausgestaltung der Simulation folgt weitgehend der originalen Maschine. Aus Platzgründen sind die Kurbeln kleiner gezeichnet als sie tatsächlich waren. Alle Bedienelemente werden durch Anklicken mit der Maus betätigt. Es sind dies

I	Einstellknöpfe für die erste Differenz
II	Einstellknöpfe für den Funktionswert
III	Druckwerk
IV	Einstellknöpfe für die zweite Differenz
a	Kurbel a
b	Kurbel b
c	Umschaltknopf für Addition / Subtraktion der zweiten Differenz
d	Umschaltknopf für Addition / Subtraktion der ersten Differenz

Abgesehen von IV entsprechen alle Bezeichnungen der originalen Darstellung in Bild 1. Die Bedienung der Simulation ergibt sich aus den Rechenbeispielen im Haupttext.

Das Druckwerk III ist anders ausgeführt als am Original. An der Originalmaschine läuft der Papierstreifen horizontal von rechts nach links heraus und wird nach einem Rechengang abgetrennt. Während des Ausdrucks stehen die Zahlen auf ihm senkrecht, sie können also vor dem Abtrennen nur von der rechten Seite her gelesen werden. Die originalgetreue Simulation eines solchen Ablaufs brächte hier eine unnötige Erschwernis mit sich. Stattdessen läuft der virtuelle Papierstreifen in der Simulation nach oben heraus, sodass die Ergebnisse sofort abgelesen werden können. Der Rollbalken an der rechten Seite erlaubt die Sicht auf den ganzen Ausdruck. Zudem können Teile des Papierstreifens oder der vollständige Inhalt durch Markieren und Kopieren mit der Maus auf einen Texteditor übertragen werden. Der Knopf 'clear' löscht den Inhalt des Papierstreifens.

Anhang 4:
Herstellung mathematischer Tabellen (Originaltext)

Quelle: (Lit. 7), S. 812 – 815

9. Herstellung mathematischer Tabellen. Auf dem Satze der Differenzenrechnung [I E, Nr. 2]: „Wird von einer ganzen Funktion m^{ten} Grades für äquidistante Intervalle des Argumentes eine Reihe von Werten gebildet, so sind die m^{ten} Differenzen derselben konstant" beruht eine Interpolationsmethode, die für die Herstellung mathematischer Tafelwerke von grosser Wichtigkeit ist, da sie die Bildung neuer Funktionswerte durch successive Summation gestattet; sie wird häufig die *Mouton*'sche Methode genannt, obwohl sie schon von *Henry Briggs*[18]) und *Cotes*[19]) ebenso wie von *Gabriel Mouton*[20]) auf empirischem Wege gefunden und bei der Berechnung der Logarithmentafeln im grössten Umfange angewendet worden war. Die durch Induktion gefundenen Resultate hat *Lagrange* mittelst eines symbolischen Kalküls[21]) streng begründet[22]).

Sind $T_0 T_1 T_2 \ldots T_n T_{n+1} \ldots$ Glieder einer vorgelegten Reihe und $D_1 D_2 D_3 \ldots$ die Differenzen erster, zweiter, etc. Ordnung, d. h. ist $D_0 = T_0$, $D_1 = T_1 - T_0$, $D_2 = T_2 - 2T_1 + T_0$, u. s. f., so wird allgemein:

$$D_m = T_m - m T_{m-1}$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} T_{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} T_{m-3} + \cdots (-1)^m T_0,$$

---

17) *Encke*, Über mech. Quadr., Berl. Jahrb. 1837 u. 1862 = Ges. Abh. 1, p. 21, 61.

18) *H. Briggs*, Arithmetica logarithmica, Lond. 1620, Kap. XIII; Trigonometria Brit., Lond. 1633, Kap. XII.

19) *R. Cotes*, Canonotechnia sive Constructio Tabularum per differentias, Opera misc. Cambr. 1722.

20) *Mouton,* Observationes diametrorum Solis et Lunae. Lugd. 1670.

21) *Lagrange*, Sur une nouvelle espèce de calcul, Berl. N. Mém. 3, année 1772 [74] = oeuvres 3, p. 441.

22) *Lagrange,* Mém. sur la méthode d'interpolation, oeuvres 5, p. 663.

und umgekehrt [I E, Nr. 4]:

$$(20)\quad T_n = D_0 + nD_1 + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}D_2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}D_3 + \cdots.$$

Ist n eine ganze Zahl und ist die Funktion, welche die Werte T darstellt, eine ganze vom Grade r, sodass $D_{r+1} = 0$ wird, so kann die Formel (20) (die Newton'sche Interpolationsformel [Nr. 4]) durch successive Addition aus den Differenzen gebildet werden; z. B. man berechnet von der Funktion $10z^3 - 101z^2 - 109z + 1799$ die Werte für $z = 0, 1, 2, 3$ direkt und bildet das Differenzenschema:

z	f	f^{I}	f^{II}	f^{III}
0	$+1799$			
		-200		
1	$+1599$		-142	
		-342		$+60$ (konstant).
2	$+1257$		$-\ 82$	
		-424		
3	$+\ 833$			

Die übrigen Werte folgen dann durch folgende Rechnung:

z	D_0	D_1	D_2	D_3
0	$+1799$	-200	-142	$+60$
1	$+1599$	-342	$-\ 82$	$+60$
2	$+1257$	-424	$-\ 22$	$+60$
3	$+\ 833$	-446	$+\ 38$	$+60$
4	$+\ 387$	-408	$+\ 98$	$+60$
5	$-\ 21$	-310	$+158$	...
6	$-\ 331$	-152	....	
7	$-\ 483$	....		
....				

Ist nun die Aufgabe gestellt, zwischen die Glieder der Reihe $T_0, T_1, \ldots$ andere einzuschalten, welche dasselbe Gesetz befolgen, also die neue Reihe $t_0, t_1, \ldots$ mit den Differenzen $d_0, d_1, d_2, \ldots$ zu bilden, für welche allgemein $t_{ms} = T_s$ sein soll, so kommt es offenbar nur darauf an, die Differenzen $d_0, d_1, d_2, \ldots$ durch bekannte Grössen auszudrücken, um dann durch successive Summation die eingeschalteten Glieder herzustellen. *Lagrange* findet:

$$d_s = aD_s + bD_{s+1} + cD_{s+2} + dD_{s+3} + \cdots,$$

$$a = \frac{1}{m^s},$$

$$b = s\,\frac{1-m}{1\cdot 2m}\,a,$$

$$c = \frac{2s}{2}\,\frac{(1-m)(1-2m)}{1\cdot 2\cdot 3\,m^2}\,a + \frac{s-1}{2}\cdot\frac{1-m}{1\cdot 2m}\,b,$$

$$d = \frac{3s}{3}\frac{(1-m)(1-2m)(1-3m)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 m^3}a + \frac{2s-1}{3}\frac{(1-m)(1-2m)}{1\cdot 2\cdot 3 m^2}b + \frac{s-2}{3}\frac{1-m}{1\cdot 2m}c,$$

. . . . ,

womit das Mouton'sche Problem allgemein gelöst ist.

Schliessen die Differenzen der Reihe T mit D_r ab, so dass $D_{r+1} = 0$ wird, so wird:

für $s = r$ $\quad d_r = aD_r; \quad a = \frac{1}{m^r},$

„ $s = r-1 \quad d_{r-1} = aD_{r-1} + bD_r; \quad a = \frac{1}{m^{r-1}}, \quad b = \frac{(r-1)(1-m)}{2m^r},$

„ $s = r-2 \quad d_{r-2} = aD_{r-2} + bD_{r-1} + cD_r;$

$$a = \frac{1}{m^{r-2}}, \quad b = \frac{(r-2)(1-m)}{2m^{r-1}},$$

$$c = \frac{(r-2)(1-m)(1-2m)}{1\cdot 2\cdot 3m^r} + \frac{(r-2)(r-3)(1-m)^2}{8m^r},$$

. . . .

Wünscht man in obigem Beispiel zwischen je 2 Glieder der Reihe weitere 4 einzuschalten, also jedes Intervall in 5 Unterteile zu teilen, so hat man zu setzen $m = 5$, $r = 3$ und findet mit:

$$D_1 = -200, \quad D_2 = -142, \quad D_3 = +60$$

die Differenzen der vervollständigten Reihe:

$$d_3 = +\frac{1}{125}60 = +0{,}48$$

$$d_2 = -7{,}60$$

$$d_1 = -25{,}76,$$

und damit durch folgende Rechnung die eingeschalteten Glieder:

z				
0,0	+ 1799,00	− 25,76	− 7,60	+ 0,48
0,2	+ 1773,24	− 33,36	− 7,12	+ 0,48
0,4	+ 1739,88	− 40,48	− 6,64	+ 0,48
0,6	+ 1699,40	− 47,12	− 6,16	+ 0,48
0,8	+ 1652,28	− 53,28	− 5,68	+ 0,48
1,0	+ 1599,00	− 58,96	− 5,20	+ 0,48
1,2	+ 1540,04	− 64,16	− 4,72	+ 0,48
1,4	+ 1475,88	− 68,88	− 4,24	+ 0,48
1,6	+ 1407,00	− 73,12	− 3,76	. . . .
1,8	+ 1333,88	− 76,88	. . . .	
2,0	+ 1257,00	. . . .		
. . . .				

Betreffs weiterer Beispiele und Methoden sehe man *A. A. Markoff*, Differenzenrechnung, Kap. IV, Herstellung und Benutzung mathematischer Tabellen. Der Gegenstand ist auch behandelt von *U. J. Leverrier*, Ann. de l'Obs. de Paris 1, 1855, p. 125.

Wertvolle Winke für Berechnung von Tafeln findet man in der Encke'schen Abhandlung „Über die Dimensionen des Erdkörpers", Berl. astr. Jahrb. für 1852.

Bildnachweis

1	aus einem Angebotsprospekt der Firma Burroughs, um 1900. Mit freundlicher Genehmigung Andreas De Man
2, 4, 6	aus Lit. 2
3	aus Lit. 12
5	aus Lit. 5
7, 8, 9	vom Verfasser erstellt

Literatur

1 Astronomischer Jahresbericht, Bd. 12. Berlin 1910

2 Bauschinger, J. und Peters, J.(Hrsg.): Logarithmisch-Trigonometrische Tafeln mit acht Dezimalstellen, 2 Bde. 1. Aufl. Leipzig 1910, 2. Aufl. Leipzig 1936, 3. Aufl. Weinheim 1958, 4. Aufl. 1970

3 Briggs - Gellibrand:
Trigonometria Britannica. Gouda 1633
s. a. Briggs' Trigonometria Britannica, translated and annotated by Ian Bruce, University of Adelaide, Australia
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Miscellaneous/Briggs2/index.html

4 Bruns, H.:
Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens. Leipzig 1903

5 Campbell-Kelly, M. u. a.(Hrsg.): The History of Mathematical Tables. Oxford 2003

6 Denkschrift über neue achtstellige Logarithmentafeln für den astronomischen Gebrauch. In: Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft, Bd. 39 (1904)

7 Enzyklopädie der math. Wissenschaften, Leipzig 1900. Bd. I, Tl. 2
Hier insbes. die Abschnitte ID3: Interpolation und IE: Differenzen-rechnung

8 Galle, A.:
Mathematische Instrumente. Leipzig und Berlin 1912

9 Glaisher, J.W.I.:
Report of the Committee … on Mathematical Tables. In: Report of the forty-third meeting of the British Association for the advancement of science. London 1874

10 Hashagen, U.:
Die Rechenmaschine Gauss – eine gescheiterte Innovation?
In: U. Hashagen, O. Blumtritt, H. Trischler (Hrsg.): Circa 1903: Wissenschaftliche und technische Artefakte in der Gründungszeit des Deutschen Museums, München, 2003, S. 371-398.

11 Krause, Christine, Technische Universität Ilmenau:
Das Positive von Differenzen. Die Rechenmaschinen von Müller, Babbage, Scheutz, Wiberg ..., 2004
http://www.rechenschieber.org Pkt. 'Was ist neu'

12 Lenz:
Die Rechenmaschinen und das Maschinenrechnen, 2. Aufl., Leipzig u. Berlin 1924

13 Markoff, A. A.: Differenzenrechnung. Leipzig 1896

14 Sonar, Thomas, TU Braunschweig:
Die Berechnung der Logarithmentafeln durch Napier und Briggs. 2004.
http://www.rechenschieber.org Pkt.'Was ist neu'

15 Weiss, Stephan:
Die Rechenmaschine Gauss, Original und Modell. 2005
http://www.mechrech.info