Ein Blick vor bzw. hinter den Rechenschieber:
Wie konstruierte Napier Logarithmen?

Joachim Fischer

0. Einleitung

Napiers Logarithmen. Die Idee des logarithmischen Rechenschiebers setzt die Existenz von *Logarithmen* voraus. Sie führen die Multiplikation auf die Addition, die Potenzierung auf die Multiplikation zurück usw., erniedrigen also den Komplexitätsgrad der jeweiligen Rechenoperation. Dies machte ihre eminente Bedeutung und ihren sofortigen Erfolg aus. Das Kunstwort *Logarithmus* (Verhältniszahl) wurde von John Napier (1550-1617) geschaffen; bevor er auf diesen griffigen Namen verfiel, verwendete er die Bezeichnung *numerus artificialis* (künstliche Zahl). Der Name und die Erleichterung des numerischen Rechnens sind jedoch die einzigen Gemeinsamkeiten, die Napiers Logarithmen mit dem modernen Logarithmus-Begriff teilen.

Zielbeschreibung. Dieser Aufsatz ist weder biographisch, noch will er die geniale Leistung Napiers bei der Konzeption seiner Logarithmen nachzeichnen. Vielmehr soll ihre nicht minder geniale *numerische Umsetzung* betrachtet werden. Dies ist in der einschlägigen Literatur bislang nur unzureichend getan worden. Zwar gab es im 19. Jahrhundert sogar zwei vollständige Nachberechnungen, doch blieben die Bearbeiter bei aller Mühe, die sie aufwandten, teils ihrem eigenen Denken verhaftet (betrachteten die Thematik also anachronistisch), teils übersahen sie schlicht wichtige Fragen. Napier erweist sich in seinen Überlegungen als ein Meister der numerischen Mathematik; mehr noch, er nimmt vielfach Betrachtungen und Analysen vorweg, die zum Teil erst Jahrhunderte später ihren angemessenen Platz im Lehrgebäude der Mathematik fanden.

Darstellung. Alle Napierschen Ideen, Sätze oder Beweise werden hier in moderner Terminologie vorgestellt. Dies erhöht nicht nur die Lesbar- und Verständlichkeit, sondern soll unterstreichen, daß es sich um die Herausarbeitung eines *Teil*aspekts handelt. Napiers eigene Darstellung ist extrem knapp und überdies stilistisch an Euklid geschult; das will sagen, daß ohne verbindende Worte Definition, Satz und Beweis auf Definition, Satz und Beweis folgen. Der Text befolgt damit einen rein deduktiven Aufbau, der in keiner Weise die Ideen-Entwicklung spiegelt. Bei numerischen Sachverhalten folgt zwar meist ein ausgesuchtes Beispiel, dessen Ergebnis manchmal später noch gezielt Verwendung findet; aber alle Hinweise auf Napiers Überlegungen, warum bestimmte Dinge so und nicht anders definiert, eingeführt oder durchgeführt werden (müssen), sind von ihm unterdrückt worden. *Hier* aber geht es genau um die Sichtbarmachung einiger dieser Ideen, die in den nur 31 Oktavseiten eines der – trotz äußerst geringer Verbreitung (vgl. Napier 1889, 140-143) – folgenreichsten Bücher der Mathematik stecken.

Die *Descriptio* und die *Constructio*. Napier publizierte seine Logarithmentafel und ihre Beschreibung als *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* 1614 in Edinburgh. Nach Napiers Tod erschien zunächst 1619 ebenfalls in Edinburgh, ein Jahr später dann – nun zusammen mit der *Descriptio* – 1620 in Lyon seine Beschreibung der Konstruktion dieser Tafel, die *Mirifici logarithmorum canonis constructio* (hier wurde die Lyoner Ausgabe der *Constructio* herangezogen). Mit ihr also werden sich die nachfolgenden Zeilen befassen.

1. Napiers Logarithmusfunktion

Napiers Ziel. Von allen Wissensgebieten der damaligen Zeit hatte die Astronomie den größten Bedarf an numerischen Hilfsmitteln. Die Formeln der ebenen und sphärischen Trigonometrie erforderten die Anwendung der vier Grundrechenarten auf vielstellige Zahlen. Insbesondere Multiplikation und Division sind hierbei sowohl langwierige wie auch fehlerträchtige Operationen. Jedes Hilfsmittel, das den Rechenaufwand verringerte oder die Fehlerquellen reduzierte, war daher hochwillkommen (Napiers Logarithmen leisteten beides, was ihren unmittelbaren Erfolg erklärt). Die Grundgröße, auf die sich letztlich jede andere trigonometrische Größe reduzieren läßt, ist der Sinus eines Winkels α. Deswegen war Napiers Ziel eine Tafel der Logarithmen für Sinus-Werte.

Die Funktion SIN. Der Sinus eines Winkels α wurde seinerzeit als Länge der Gegenkathete in einem rechtwinkligen Dreieck mit Hypotenuse h angegeben, hängt also von h ab. Je größer h gewählt wird, um so größer und daher um so genauer angebbar ist der Sinus, denn die Länge der Gegenkathete wurde üblicherweise als ganze Zahl – *ohne* Dezimalstellen – mitgeteilt. Napier legte die Sinus-Tafel von Reinhold mit $h = 10^7$ zugrunde; in dieser Sinus-Tafel ist z. B. – wobei für die auf eine Hypotenuse h von 10^7 bezogene Gegenkathete ab jetzt immer SIN geschrieben wird –

$$\begin{aligned} \mathrm{SIN}(90^0) &= 10000000, \\ \mathrm{SIN}(60^0) &= 8660254, \\ \mathrm{SIN}(45^0) &= 7071068, \\ \mathrm{SIN}(30^0) &= 5000000. \end{aligned}$$

Die modernen sin-Werte erhält man durch Division mit 10^7; Reinholds SIN-Tafel entspricht daher einer 7-stelligen sin-Tafel. Die Wahl von $h = 10^7$ beinflußt nur die Lage des Dezimalpunktes bzw. bringt ihn zum Verschwinden. Für Napiers Logarithmus, der sich von den heutigen Logarithmusfunktionen unterscheidet, wird ab nun stets die Bezeichnung LN verwendet. Unter Benutzung der Funktionsnamen LN und SIN lautet Napiers Ziel also: Konstruktion einer Tafel von LN(SIN(α)), wobei α von $0^0 0'$ in Schritten von 1' bis $90^0 0'$ fortschreitet, die Tafel also insgesamt 5401 Eingänge besitzt.

Die Funktion LN. Napiers Logarithmus LN (für Details vgl. dazu z. B. Napier 1889, Glaisher 1911, Knott 1915, Naux 1966/71, Struik 1969, Ayoub 1993, Ayoub 1994) hängt mit dem natürlichen Logarithmus ln (*logarithmus naturalis*) wie folgt zusammen:

$$\mathrm{LN}(x) = h \cdot \left(\ln(h) - \ln(x)\right) = h \cdot \ln\frac{h}{x}\,.$$

So wäre z. B. – in ganzen Zahlen, entsprechend der SIN-Tafel –

$$\begin{aligned} \mathrm{LN}(\mathrm{SIN}(90^0)) &= \mathrm{LN}(10000000) = 0, \\ \mathrm{LN}(\mathrm{SIN}(60^0)) &= \mathrm{LN}(8660254) = 1438410, \\ \mathrm{LN}(\mathrm{SIN}(45^0)) &= \mathrm{LN}(7071068) = 3465736, \\ \mathrm{LN}(\mathrm{SIN}(30^0)) &= \mathrm{LN}(5000000) = 6931472. \end{aligned}$$

Ein Vergleich zeigt, daß die Ziffernfolge von LN(SIN(α)) der Ziffernfolge von ln(sin(α)) entspricht; nur Vorzeichen und Lage des Dezimalpunkts sind verschieden. Die Definition Napiers zieht $\mathrm{LN}(a \cdot b) = \mathrm{LN}(a) + \mathrm{LN}(b) - h \cdot \ln(h)$ nach sich. Da Napier $h = 10^7$ verwendet, ist die heute für Logarithmen charakteristische Funktionalgleichung vom Typ $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$ bei Napier ersichtlich nicht erfüllt. Darauf kam es ihm (zunächst) auch nicht an, denn sein Logarithmus LN leistet bereits das Gewünschte.

Eigenschaften von LN. Napier leitet die Eigenschaften der Funktion LN geometrisch her. Hier einige der wichtigsten (alle §-Angaben beziehen sich auf die *Constructio*):

§ 27: $\mathrm{LN}(h) = 0$.

§ 29: $h - x < \mathrm{LN}(x) < \dfrac{h(h-x)}{x}$ [für $0 < x < h$].

§ 34: $\mathrm{LN}(x) - \mathrm{LN}(h) = \mathrm{LN}(x)$ [für $0 < x < h$].

§ 35: $\mathrm{LN}(b) + \{\mathrm{LN}(a) - \mathrm{LN}(b)\} = \mathrm{LN}(a)$,

$\mathrm{LN}(a) - \{\mathrm{LN}(a) - \mathrm{LN}(b)\} = \mathrm{LN}(b)$ [beides für $0 < a < b$].

§ 36: $\mathrm{LN}(a) - \mathrm{LN}(b) = \mathrm{LN}(u) - \mathrm{LN}(v)$, wenn $a : b = u : v$ [mit $0 < a < b$, $0 < u < v$].

§ 37: $\mathrm{LN}(a) + \mathrm{LN}(b) = 2\,\mathrm{LN}(x)$, wenn $a : x = x : b$ (also wenn $x^2 = a \cdot b$).

§ 38: $\mathrm{LN}(a) + \mathrm{LN}(v) = \mathrm{LN}(b) + \mathrm{LN}(u)$, wenn $a : b = u : v$ (also wenn $a \cdot v = b \cdot u$).

§ 39: $g_{min} < \mathrm{LN}(a) - \mathrm{LN}(b) < g_{max}$ [für $0 < a < b$], wobei
$g_{min} : h = (b - a) : b$ und $g_{max} : h = (b - a) : a$ ist.

§ 40: $\dfrac{h(b-a)}{b} < \mathrm{LN}(a) - \mathrm{LN}(b) < \dfrac{h(b-a)}{a}$ [§ 39 mit eingesetzten Schranken].

Erläuterungen. LN ist eine von $\mathrm{LN}(0) = \infty$ bis $\mathrm{LN}(h) = 0$ monoton fallende Funktion. Sie ist *per definitionem* im abgeschlossenen Intervall $[0,h] = [0,10^7]$ beheimatet, denn ihre Argumente sind nur die SIN-Werte für Winkel des ersten Quadranten. An die Stelle der heutigen Funktionalgleichung treten die §§ 36 und 38, was für die Zeitgenossen eher von Vorteil war, da man ohnehin meist in Proportionen rechnete. $\mathrm{LN}(h) = 0$ (§ 27) ist sofort zu sehen und wird in § 34 benutzt; § 35 betont, daß LN eine fallende Funktion ist (denn die in geschweiften Klammern stehende Differenz ist unter der Voraussetzung $a < b$ stets positiv) – die doppelte Formulierung dient lediglich der damals üblichen Vermeidung negativer Größen; § 37 ist ein Spezialfall von § 38. Von *zentraler Bedeutung* ist die Abschätzung des § 39, von Napier regelmäßig in der eingesetzten Form des § 40 verwendet; § 29 ist nur ein Spezialfall von § 40 (mit $a \to x$, $b \to h$).

Noch ein Wort zu Napiers Abschätzungen: vom heutigen Gesichtspunkt aus betrachtet lassen sie sich sämtlich aus geeigneten Taylor-Entwicklungen herleiten, die nach dem linearen Glied abgebrochen werden. *Dieses* Mittel stand Napier, drei Generationen vor Newton und Leibniz, natürlich noch nicht zur Verfügung. Doch waren zur damaligen Zeit die *geometrischen* Methoden der Behandlung von Funktionen schon so weit entwickelt, daß – teilweise in Verbindung mit der antiken Exhaustionsmethode – Sätze gewonnen und formuliert werden konnten, die klar in den Bereich der späteren Differential- und Integralrechnung fallen (Cavalieri, Descartes, Fermat seien hier stellvertretend für viele andere Zeitgenossen genannt; Eudoxos und Archimedes als frühe Begründer dieser Methodik). Ein besonderes und weithin bekanntes Beispiel für die Reichweite dieser geometrischen Methoden ist der Beweis des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung durch Newtons Vorgänger Barrow.

Da in diesem Aufsatz gerade nicht die kinematisch-geometrische Definition von Napiers Logarithmus LN betrachtet werden soll, sondern die numerische Seite des Problems, ist hier nicht der Platz für weitere Ausführungen. Erwähnt werden aber sollte jedenfalls, daß sich Napier auch in diesem Bereich auf der Höhe der zeitgenössischen Entwicklungen zeigt.

2. Notwendige Schritte *vor* der tatsächlichen Berechnung

Berechnungsintervall. Napier stehen *nur die Eigenschaften* von LN *und ein einziger Funktionswert* zur Verfügung. Das heißt: allein aus LN(h) = 0 und diesen Eigenschaften müssen *alle anderen* Werte berechnet werden. Berechnung heißt hier, Funktionswerte *numerisch* zu bestimmen; daher muß zunächst ein Argumentbereich – ein Zahlenintervall – gewählt werden, in dem die Funktion berechnet werden soll. Napier nimmt nicht den gesamten Definitionsbereich [0,h], sondern nur das Teilintervall $[\frac{1}{2}h, h]$. Denn z. B. § 37 liefert die Möglichkeit, Logarithmen von Zahlen des Intervalls $(0, \frac{1}{2}h]$ aus Logarithmen von Zahlen des Intervalls $[\frac{1}{2}h, h]$ zu berechnen, sobald letztere bekannt sind (man wähle $a \in [\frac{1}{2}h, h]$, $x = \frac{1}{2}h$; dann ist $b \in [\frac{1}{4}h, \frac{1}{2}h]$ und LN(b) nach § 37 berechenbar, usw.); daneben gibt es noch weitere Möglichkeiten (s. u.). In jedem Fall zeugt die Beschränkung auf das Intervall $[\frac{1}{2}h, h]$ auch von Napiers verständlichem Streben nach Minimierung des Berechnungsaufwands (zu Ende der *Constructio* wird Napier eine Methode vorschlagen, die sogar nur mit dem Startintervall $[\frac{\sqrt{2}}{2}h, h]$ auskommt).

Genauigkeit. Neben dem Berechnungsintervall muß die Berechnungsgenauigkeit festgelegt werden. Napier strebte eine LN(SIN)-Tafel mit ganzzahligen Werten an; daher ist sein Kriterium hierfür auf die Einerstelle eines berechneten Logarithmus bezogen (§ 6): *der absolute Fehler muß dem Betrag nach stets kleiner als eine Einheit der Einerstelle sein* (ohne daß der wahre Wert bekannt wäre). Also lautet die Aufgabe nun: ausgehend nur von $\mathrm{LN}(\mathrm{SIN}(90^0)) = 0$ und den hergeleiteten Eigenschaften soll die Funktion LN im Intervall $[\mathrm{SIN}(30^0), \mathrm{SIN}(90^0)]$ so berechnet werden, daß der absolute Fehler dem Betrag nach in diesem Intervall stets < 1 ist. Napier war sich dieser hier modern formulierten Problemstellung vollkommen bewußt; er ergriff die notwendigen Maßnahmen und schuf teilweise die erforderlichen Untersuchungsmethoden. Das gilt insbesondere für seine Behandlung von Fehlerquellen.

Fehlerfortpflanzung. Da Napier die Funktion LN noch nicht kennt, sondern sie erst berechnen will, kann er nur eine Vorwärts-Analyse seines Berechnungsverfahrens vornehmen. Das heißt, er untersucht sein Verfahren auf die Fortpflanzung von Anfangsfehlern, um daraus zu sehen, unter welchen Voraussetzungen er sein Ziel mit der angestrebten Genauigkeit erreichen kann. Da ihm nur der Wert LN(h) = 0 und die Eigenschaften von LN zur Verfügung stehen, müssen daher insbesondere letztere untersucht werden. Sie machen – wie man sieht – von den vier Grundrechenarten sowie von *Abschätzungen in der Form von unteren und oberen Schranken* Gebrauch. Eine von Napiers weiteren genialen Ideen ist es nun, aufgrund dieses Sachverhalts die vier Grundrechenarten mit *solchen* Größen zu betrachten, deren Werte durch die Angabe von unteren und oberen Schranken eingegrenzt sind. Das nennt man heute *Intervall-Arithmetik* (Name und Gebiet existieren aber erst seit dem 20. Jahrhundert).

Intervall-Arithmetik bei Napier. Obwohl laufend in der *Constructio* verwendet, ist die wohl erste je durchgeführte intervall-arithmetische Untersuchung der vier Grundrechenarten durch Napier kaum – wenn je – gewürdigt worden. Vorweg noch eine kurze Bemerkung: Napier verwendet keine Zeichen für Ordnungsrelationen; auch unterscheidet er nicht streng zwischen "<" und "≤" (vor allem letztere Relation würde man heute in praktisch allen seiner Formulierungen benutzen), ebenso wenig wie negative Größen bei ihm auftreten. Die nachfolgenden modernen Formulierungen spiegeln daher – wie schon die früheren – entweder Napiers verbal formulierten oder den aus seinen zahlreichen Beispielen entnehmbaren *Gebrauch*.

Es seien die Größen a und b nur innerhalb bestimmter Schranken (heute also: *innerhalb eines Intervalls*) bekannt, z. B.

§ 7: $0 < a_{min} < a < a_{max}, \quad 0 < b_{min} < b < b_{max}$.

Dann gelten für die Ergebnisse der vier Grundrechenarten folgende Abschätzungen:

§ 8: $a_{min} + b_{min} < a + b < a_{max} + b_{max}$

§ 9: $a_{min} \cdot b_{min} < a \cdot b < a_{max} \cdot b_{max}$

§ 10: $a_{min} - b_{max} < a - b < a_{max} - b_{min}$ [hier ist implizit $a_{min} - b_{max} > 0$ gefordert]

§ 11: $\frac{a_{min}}{b_{max}} < \frac{a}{b} < \frac{a_{max}}{b_{min}}$.

Modern gesagt: Napier führt eine *Wertschranken-Analyse* der vier Grundrechenarten durch, die *sowohl* Eingangsfehler *als auch* ihre Fortpflanzung in den Rechenoperationen berücksichtigt. Müssen Wertschranken auf- oder abgerundet werden, so dürfen untere Wertschranken dabei nur verkleinert, obere Wertschranken nur vergrößert werden. Für den Spezialfall der Rundung von (bei Napier ja immer positiven) *Zahlen mit Brüchen* (oder Zahlen mit Dezimalstellen) auf *ganze Zahlen* findet man auch dies bereits in der *Constructio* (§ 12): Bei Rundung der Schranken a_{min}, a_{max} für eine Zahl a auf ganze Zahlen ist bei a_{min} nur der ganzzahlige Teil zu behalten, bei a_{max} der ganzzahlige Teil um 1 zu erhöhen. Napiers Beispiel: aus $10496\frac{2364}{3210} < a < 10505\frac{827}{3215}$ folgt in ganzen Zahlen $10496 < a < 10506$.

Genauigkeitsverhalten bei Multiplikation mit ganzen Zahlen. Bei Napier muß eine berechnete Zahl oftmals anschließend noch mit (positiven) ganzen Zahlen eines vorab bekannten Bereichs multipliziert werden, wobei das Resultat eine bestimmte Genauigkeit besitzen soll, z. B. m Dezimalen. Dann reicht es natürlich nicht aus, wenn die zuerst berechnete Ausgangszahl auch nur auf m Dezimalen berechnet wurde. Konsequenz: *die Ausgangszahl muß mit höherer Genauigkeit berechnet werden*. Napier verwendet dabei (z. B. in §§ 16-19, 47, 51, 52) implizit folgende sofort einsehbare Regel: Wird eine Ausgangszahl mit einem bis zu k-stelligen ganzzahligen Faktor > 1 multipliziert und das Ergebnis auf m Dezimalen genau benötigt, so muß die Ausgangszahl auf m + k Dezimalen berechnet werden (man überzeugt sich leicht von der Notwendigkeit und Gültigkeit dieser Regel). Falls eine präzisere Eingrenzung erforderlich ist, verwendet Napier daneben anscheinend die schärfere Regel: wird das Resultat mit Genauigkeit $< 10^{-m}$ benötigt, und ist der ganzzahlige Faktor n, so muß die Ausgangszahl mindestens mit Genauigkeit $< 10^{-m}/n$ berechnet werden.

Optimale Schranken, optimale Werte. Ist von einer Größe nur bekannt, daß ihr Wert sich innerhalb gewisser Schranken befindet, setzt Napier, sobald der numerische Wert benötigt wird, als Optimum den *Mittelwert der Schranken* an. Die Mittelwertbildung wird dabei so weit wie möglich hinausgezögert, um die Genauigkeit nicht vorzeitig zu beeinträchtigen (siehe dazu weiter unten). Daher führt Napier sie erst dann aus, *wenn die Schranken* in einem gewissen Sinn *optimal* sind. Wann dabei Schranken von Napier als optimal erachtet werden, ist (allerdings wieder nur implizit) an vielen Stellen der *Constructio* zu erkennen; dabei wird ersichtlich, daß Napier zwei verschiedene Begriffe von Optimalität verwendet, die den gegebenen Umständen angepaßt sind; sie seien hier als *starke* bzw. *schwache Eingrenzung* bezeichnet.

Eine explizite Formulierung würde etwa lauten: eine auf m Dezimalen gesuchte Zahl ist optimal eingegrenzt, wenn *entweder* ihre Schranken sich um weniger als eine Einheit der m-ten Dezimale unterscheiden (starke Eingrenzung; nicht immer möglich) *oder* wenn die Schranken wenigstens mit der best-verfügbaren Genauigkeit berechnet wurden (schwache Eingrenzung).

Formal: ein auf $m \geq 0$ Dezimalstellen benötigtes a mit $0 < a_{min} < a < a_{max}$ ist *stark eingegrenzt*, wenn $a_{max} - a_{min} < 10^{-m}$ ist. Der *optimale Wert* $\bar{a}$ ist stets durch $\bar{a} = \frac{1}{2}(a_{min} + a_{max})$ gegeben, und auch im Fall der *schwachen Eingrenzung* ist der Mittelwert das Beste, das sich erreichen läßt. Ist die Voraussetzung der starken Eingrenzung gegeben, so ist $\bar{a}$ auch in einem heute verwendeten Sinn optimal, nämlich *zuverlässig*. Ein Näherungswert heißt dabei zuverlässig, wenn sein absoluter Fehler dem Betrag nach kleiner als eine halbe Einheit der letzten mitgeteilten Dezimalstelle ist. Daher sind Napiers Werte meist sogar noch genauer berechnet, als er eigentlich forderte (s. o.).

3. Auf dem Weg *zur* Berechnung

Eine (zunächst) naheliegende Idee. Napiers Funktion y = LN(x) ist die kontinuierliche Version der Verknüpfung einer geometrischen Folge (ihr entspricht das Argument x) mit einer arithmetischen Folge (ihr entspricht der Logarithmus y). Dieser durch die §§ 38 bzw. 36 gelieferte Zusammenhang existiert bei LN nicht nur an ausgewählten Punkten (wie eben z. B. bei Folgen), sondern *im gesamten (kontinuierlichen) Definitionsbereich*. § 36 besagt, daß zwei Zahlenpaare (a,b) und (u,v), die zueinander in gleicher Proportion stehen, die gleiche Logarithmendifferenz besitzen: LN(a) – LN(b) = LN(u) – LN(v). Nun stehen gerade in einer geometrischen Folge $\{x_k\}_{k=0,1,2...} = \{x_0 q^k\}_{k=0,1,2...}$ *alle* Paare $(x_{k+1},x_k)_{k=0,1,2...}$ benachbarter Folgenglieder stets in gleicher Proportion q zueinander; also sind *alle* Logarithmendifferenzen $LN(x_{k+1}) - LN(x_k)$ gleich. Konstruiert man daher von h ausgehend eine (fallende) geometrische Folge $\{x_k\}$, so ist

$$x_0 = h, \quad x_{k+1} = q \cdot x_k \quad (0 < q < 1;\ k = 0, 1, 2, ...),$$

$$x_{k+1} : x_k = ... = x_2 : x_1 = x_1 : x_0 = q < 1,$$

$$LN(x_{k+1}) - LN(x_k) = ... = LN(x_2) - LN(x_1) = LN(x_1) - LN(x_0) = LN(x_1).$$

Letzteres heißt also insbesondere

$$LN(x_k) = k \cdot LN(x_1).$$

Wählt man q nahe bei 1, so liegen die x_k dicht beieinander (andererseits braucht man viele Folgenglieder, um von h zu h/2 zu gelangen). Zunächst also wird doch wieder eine (diskrete) fallende geometrische Folge in den (kontinuierlichen) Definitionsbereich eingebettet. Der Unterschied zu Napiers Vorgängern, insbesondere aber zu seinem Zeitgenossen Bürgi liegt jedoch genau in dieser Einbettung: denn sie ermöglicht Napier die *Lösung des* stets bei der Betrachtung diskreter Folgen auftretenden *Interpolationsproblems*. Denn um nun auch Logarithmen LN(x) von nicht in der Folge $\{x_k\}$ vorkommenden Werten x zu erhalten, verwendet Napier die Abschätzung des § 40. Dabei fordert er, daß LN(x) mit der notwendigen Genauigkeit eingegrenzt sein soll; *dies läßt dann Rückschlüsse auf geeignete Werte von q zu*. Dieses Vorgehen läßt sich nur rekonstruieren; *explizit* ist es nicht einmal andeutungsweise so in der *Constructio* zu finden (Stichwort: *deduktiver* euklidischer Stil). Es wird jedoch später klar werden, daß Napier so vorgegangen sein *muß*.

Entscheidend für die Wahl von q ist also die Interpolationsvorschrift § 40 in Verbindung mit der geforderten Genauigkeit. Hier erweist sich Napier einmal mehr als Meister numerischer Analysis.

Interpolation im Rahmen der vorgegebenen Genauigkeit. § 40 kann durch Addition von LN(b) sofort in die Form

$$\mathrm{LN}(b) + \frac{h(b-a)}{b} < \mathrm{LN}(a) < \mathrm{LN}(b) + \frac{h(b-a)}{a}$$

gebracht werden. LN(a) ist dann gemäß der für das Berechnungsintervall angestrebten Genauigkeit *ohne nennenswerten Fehler* (*absque sensibili errore*) bestimmt, wenn die beiden angegebenen Schranken für LN(a) sich um weniger als die oben erwähnte *eine* Einheit der Einerstelle unterscheiden, also um weniger als 1:

$$\frac{h(b-a)}{a} - \frac{h(b-a)}{b} = \frac{h(b-a)^2}{ab} < 1\,.$$

Mit $b = x_k$, $a = x$ und der Annahme, daß die $\mathrm{LN}(x_k)$ bereits bekannt seien (s. o.), ergibt sich hieraus rasch *ein Kriterium für einen ohne nennenswerten Fehler berechneten Wert* von LN(x); genauer: ein Kriterium dafür, wie dicht die Folge der x_k gewählt werden muß, damit diese Bedingung für Interpolation innerhalb der Tafelgenauigkeit erfüllt ist. Und nochmals anders formuliert: ein Kriterium für eine zulässige Wahl von q.

Eine konkrete Bedingung für q. Zu jedem nicht *in* der Folge auftauchenden Wert x existiert ein zu ihm *nächstgelegener* Wert x_k der Folge; hier sei der Einfachheit halber nur der Fall $x_{k+1} < x < x_k$ ausführlicher betrachtet. Für den Abstand $x_k - x$ gilt

$$0 < x_k - x \le \tfrac{1}{2}(1-q)x_k\,.$$

Denn $x_k - x_{k+1} = (1-q)x_k$ ist der Abstand von x_k zum nächst(kleiner)en Folgenglied x_{k+1}. Da x zu x_k nächstgelegen sein soll, kann der Abstand von x zu x_k höchstens die Hälfte des Abstands $x_k - x_{k+1}$ betragen (denn sonst wäre x_{k+1} näher an x). Diese Ungleichung zieht

$$\tfrac{1}{2}(1+q)x_k \le x < x_k$$

als Umformulierung nach sich. Das obige Genauigkeitskriterium (mit $b = x_k$, $a = x$, s. o.)

$$\frac{h(x_k - x)^2}{x \cdot x_k} < 1$$

ist sicher *a fortiori* erfüllt, wenn der Zähler des hier auftretenden Bruchs *vor* dessen Beschränkung durch 1 mithilfe der ersten Ungleichung vergrößert, der Nenner mithilfe der zweiten Ungleichung verkleinert wird (vgl. Napiers intervall-arithmetischen § 11 für ein analoges Vorgehen):

$$\frac{h(x_k - x)^2}{x \cdot x_k} \le \frac{h\,\frac{1}{4}(1-q)^2 x_k^2}{\frac{1}{2}(1+q)x_k \cdot x_k} = \frac{h(1-q)^2}{2(1+q)} < 1\,.$$

Diese letztere (quadratische) Ungleichung für q ist mit $0.99936764... < q < 1$ erfüllt (die Betrachtung des Falls $x_k < x < x_{k-1}$ führt mit entsprechend modifizierten Schranken auf eine lineare Ungleichung für q, die die Lösung $0.99936794... < q < 1$ besitzt). Damit ist eine Größenordnung für q festgelegt, die Napier *die gewünschte Genauigkeit garantiert*. Der dazu nächste, numerisch gut handhabbare (s. u.) *und* zulässige Wert für q ist 0.9995.

Eine konkrete Bedingung für die Genauigkeit von LN(x_1). Es ist also jetzt klar, daß und warum Napiers spätere Grundtabelle (trotz einer kleinen Abweichung in ihrer Organisation) auf dem Quotienten $q = 0.9995$ basiert. Die soeben für q gefundene Bedingung basierte jedoch ihrerseits auf der Annahme, daß *alle* LN(x_k) bereits in der angestrebten Genauigkeit vorlägen. Wegen $\mathrm{LN}(x_k) = k \cdot \mathrm{LN}(x_1)$ stellt sich die daher Frage nach der Genauigkeit, mit der LN(x_1) bestimmt werden muß (s. o., Genauigkeitsverhalten bei Multiplikation mit ganzen Zahlen). $x_k = q^k x_0 = q^k h$ legt nahe, erst einmal die q^k mit $q = 0.9995$ zu betrachten:

$$q^0 = 1.0000,\ q^1 = 0.9995,\ q^2 \approx 0.9990,\ ...\ q^{20} \approx 0.9900.$$

Setzt man jetzt $p = 0.99 \approx q^{20}$, so kann man ab hier schneller vorankommen:

$$p^0 = 1.00,\ p^1 = 0.99,\ p^2 \approx 0.98,\ ...\ p^{69} \approx 0.50$$

(genauer: $p^{69} < 0.5 < p^{68}$). Damit ist $h/2 \approx p^{69}h \approx (q^{20})^{69}h = q^{1380}h$; eine von h ausgehende fallende geometrische Folge mit Faktor $q = 0.9995$ hat also nach 1380 Gliedern h/2 erreicht und füllt das Berechnungsintervall $[\frac{1}{2}h, h]$ so mit Stützstellen aus. Da Napiers LN-Werte am Ende $m = 0$ Dezimalen haben sollen, muß LN(x_1) = LN(9995000) auf mindestens $10^{-m}/1380 \approx 0.0007$ genau berechnet werden (s. o.). § 40 (in der Fassung von § 29) liefert aber mit

$$5000 < \mathrm{LN}(9995000) < 5002.50125$$

ersichtlich nicht die erforderliche Genauigkeit. Es gibt zwei Auswege: Napier könnte sein Verfahren *iterieren*, [9995000,10000000] als Berechnungsintervall wählen und in diesem Intervall 0.0007 als Mindestgenauigkeit ansetzen – oder "von vorne" ausgehen (wofür die hier vorgelegte Rekonstruktion plädiert) und von dort aus $q = 0.9995$ zu erreichen suchen (denn es handelt sich nach dem bisherigen Ergebnis "nur" darum, LN(9995000) mit der notwendigen Genaigkeit zur Verfügung zu haben):

Das Ganze von vorn, *oder*: LN(9999999). Für die LN(SIN)-Tafel muß LN muß nur für 5400 ausgewählte *natürliche* Zahlen $x = \mathrm{SIN}(\alpha)$ ausgewertet werden; also liegt es nahe, daß Napier sich auf sie konzentrierte. Für $x = h = 10^7$ ist LN(10000000) = 0 bekannt; die zu h nächste natürliche Zahl in [0,h] ist $h - 1 = 9999999$. Sie wäre zugleich das Glied v_1 einer von $v_0 = h$ ausgehenden geometrischen Folge mit Quotient $r = 0.9999999$,

$$v_{k+1} = 0.9999999 v_k \ (k = 0, 1, 2, ...).$$

Insbesondere gilt für $LN(v_1) = LN(9999999)$ nach § 29 sofort

$$1 = h - 9999999 < LN(9999999) < \frac{h(h - 9999999)}{9999999} = 1.00000010000001...$$

Napier gibt zwar den letzteren Wert sogar um noch eine weitere Periode 0000001 verlängert an, entscheidet sich hier aber vernünftigerweise, nur mit 1.0000001 weiterzurechnen und die restlichen Stellen – zu Recht – zu vernachlässigen, also

$$1 < LN(9999999) < 1.0000001$$

festzuhalten. Diese Eingrenzung ist *bei Beschränkung auf ganzzahliges* x die *schärfste Eingrenzung*, die sich aus LN(h) = 0 für *irgendeinen* LN(x)-Wert ableiten läßt (Napier war es sicher sofort klar, daß die Abschätzungen von § 29 bzw. § 40 dann am schärfsten sind, wenn $h \approx x$ bzw. $a \approx b$ ist). Die Differenz zwischen den Schranken für *diesen* LN-Wert ist *eine Einheit der 7. Dezimalstelle*. Dies *begründet* zudem, warum Napier später die Grenzen für alle seine LN-Werte auf 7 Dezimalstellen berechnet – denn genauer ist nun nicht mehr sinnvoll.

Anschluß. Napier muß nun wegen $v_k = r^k v_0 = r^k h$ in Analogie zum Vorgehen bei q die Werte r^k betrachten:

$$r^0 = 1.0000000,\ r^1 = 0.9999999,\ r^2 \approx 0.9999998,\ ...\ r^{100} \approx 0.9999900.$$

Setzt man jetzt $s = 0.99999 \approx r^{100}$, so kann man ab hier schneller vorankommen:

$$s^0 = 1.00000,\ s^1 = 0.99999,\ s^2 \approx 0.99998,\ ...\ s^{50} \approx 0.99950$$

(genauer: $s^{51} < 0.9995 < s^{50}$). Also hat die Folge $\{v_k\}$ nach 5000 Gliedern mit $s^{50}h \approx (r^{100})^{50}h = r^{5000}h = v_{5000} \approx 9995000 = x_1$ den Anschluß an die Folge $\{x_k\}$ erreicht. Wegen $LN(v_k) = k \cdot LN(v_1)$ verschlechtert sich zwar die Genauigkeit von $LN(v_{5000})$ auf $5000 \cdot 0.0000001 = 0.0005$ (s. o.), doch wegen $0.0005 < 0.0007$ ist damit ist *die für die Berechnung von* LN(9995000) *erforderliche Genauigkeit erreicht.*

4. Die Ausführung

Die Tabellen I-III. Für diese Rekonstruktion spricht unter anderem, daß genau die vier geometrischen Folgen mit den immer "gröber" werdenden Quotienten $r = 0.9999999$, $s = 0.99999$, $q = 0.9995$ und $p = 0.99$ auch bei Napier auftauchen. Jede von diesen Folgen (bis auf die letzte) hat Anschluß an das zweite Glied der nächsten Folge (das erste ist ja immer h) und die letzte führt ihn bis h/2; denn $r^{100} \approx s$, $s^{50} \approx q$, $q^{20} \approx p$, $p^{69} \approx 0.5$. Würde Napier ohne diesen Stafettenwechsel vorgehen und stets bei r bleiben (von dem er in seiner *Constructio* tatsächlich ausgeht), so müßte er wegen $(((r^{100})^{50})^{20})^{69} = r^{6900000} \approx 0.5$ knapp sieben Millionen x_k-Werte und Logarithmen $LN(x_k)$ berechnen – und fast alle davon wären überflüssig, weil ja schon 1380 Werte einer Folge mit dem Quotienten $q = 0.9995$ ihm die nachweislich genaue Interpolation ermöglichen.

Napier berechnet nun jedoch nicht diese vier geometrischen Folgen bis zum jeweiligen Stafettenwechsel, sondern nur die beiden ersten *sowie eine geometrische Doppelfolge*;

letztere füllt $[\frac{1}{2}h, h]$ aber so aus, *als sei* sie eine geometrische Folge mit Quotient 0.9995 (denn nur dann funktioniert die Interpolation in der gewünschten Genauigkeit, s. o.) und erleichtert ihm dafür die Berechnung ganz wesentlich. Die Napierschen Folgen sind

$v_k = 0.9999999^k h$, $0 \le k \le 100$ [Napiers Tabelle I],
$z_l = 0.99999^l h$, $0 \le l \le 50$ [Napiers Tabelle II],
$x_{m,n} = 0.99^m 0.9995^n h$, $0 \le m \le 68$, $0 \le n \le 20$ [Napiers Tabelle III].

Diese Folgen müssen ihrerseits berechnet und dann durch die Logarithmen der in ihnen auftretenden Zahlen vervollständigt werden; ist dies geschehen, reicht nach Obigem Tabelle III und die Interpolationsregel, um beliebige LN(x)-Werte des Berechnungsintervalls aus dem Wert $LN(x_{m,n})$ des zu x nächstgelegenen $x_{m,n}$ der Tabelle III zu berechnen. Daher nennt Napier die mit Logarithmen vervollständigte Tabelle III *Grundtabelle* (*tabula radicalis*). Für die Vervollständigung aller drei Tabellen mit LN-Werten sind jedoch nur die *vier* folgenden Logarithmen nötig:

$LN(v_1)$, $LN(z_1)$, $LN(x_{0,1})$ und $LN(x_{1,0})$, also

LN(9999999), LN(9999900), LN(9995000) und LN(9900000).

Doch zunächst müssen *die Folgen selbst* berechnet werden – eine ebenfalls nicht zu unterschätzende Arbeit. Daher suchte Napier geometrische Folgen, die leicht berechenbar sein sollten. Regeln dazu formuliert er in den §§ 13-15 der *Constructio*; ohne ihre Beachtung ist das Nachprüfen seiner Rechnungen nicht möglich.

Leicht berechenbare geometrische Folgen. *Jede arithmetische* Folge $\{a_n\}$ ist wegen $a_{n+1} = a_n + d$ leicht (nämlich durch Additionen oder Subtraktionen) berechenbar. Eine *geometrische* Folge $\{b_n\}$, $b_{n+1} = q \cdot b_n$, ist nur dann ähnlich leicht durch Additionen oder Subtraktionen berechenbar, wenn die besondere Form ihres Quotienten q dies erlaubt. Napier geht dabei gleich von den bei ihm ausschließlich zur Verwendung kommenden *fallenden* geometrischen Folgen aus, also von $0 < q < 1$. Dies kann mit $q = 1 - w$ (also auch $0 < w < 1$) in der Form

$$b_{n+1} = q \cdot b_n = (1 - w) \cdot b_n = b_n - w \cdot b_n$$

geschrieben werden; von b_n ist also ein bestimmter Bruchteil $w \cdot b_n$ abzuziehen, um b_{n+1} zu erhalten. Welche Bruchteile w sind leicht zu erhalten? Nach Napier in erster Linie $w = 1/10^m$, in nächster Linie auch $w = 1/(2 \cdot 10^m)$.

Rundungsvorschriften für Teile. Da Napier im Dezimalsystem rechnet, ist die Bildung des 10^mten Teil zunächst lediglich eine Verschiebung des Dezimalpunkts um m Stellen nach links. Bei Napier werden die rechts entstehenden zusätzlichen m Dezimalstellen jedoch *nicht mitgeführt*, sondern von hinten her *abgeschnitten*, so daß stets die durch die Ausgangszahl vorgegebene Genauigkeit reproduziert wird. Sein Beispiel für m = 1 (also Division durch 10) in § 14 der *Constructio* zeigt dies: ausgehend von 99321 erhielte er durch Verschiebung des Dezimalpunkts 9932.1; aber da die Ausgangszahl *keine* Dezimalstellen führte, wird die rechts neu entstandene Dezimalstelle durch Abschneiden entfernt; bleibt 9932. Fortsetzung liefert die Folge $99321 \to 9932 \to 993 \to 99$ ($\to 9$). Daher die folgende Regel: nach Erreichen der durch die Zahl k der Dezimalstellen des Ausgangswerts vorgegebenen Genauigkeit wird das Ergebnis abgeschnitten.

Abschneiden oder Verkürzen liefert stets *gültige* Ziffern, d. h. die Ziffernfolge der verkürzten Zahl stimmt bis zu der Stelle, an der die Verkürzung vorgenommen wurde, mit der Ziffernfolge der unverkürzten Zahl überein. Der absolute Fehler, definiert als die Differenz $\tilde{x} - x$ zwischen Näherung $\tilde{x}$ und wahrem Wert x, ist beim Verkürzen positiver Zahlen (und nur solche betrachtet Napier) stets negativ; dem Betrag nach ist er $< 10^{-k}$, wenn in der Näherung k gültige Dezimalstellen mitgeteilt werden.

Fast ebenso leicht zu berechnen ist nach Napiers § 15 der $2 \cdot 10^m$te Teil einer Zahl. Dabei wird *zuerst* der 10^mte Teil gebildet wie vorher, *anschließend* durch 2 geteilt, und *auch hier* nach Erreichen der vorgegebenen Zahl von k Dezimalstellen *abgeschnitten*. Der absolute Fehler bei diesem Verfahren ist wiederum negativ und bleibt, wie man leicht sieht, trotz des zweimaligen Abschneidens $< 10^{-k}$. Napiers Beispiele machen auch dies deutlich: in einem ersten Beispiel ermittelt er 1/2000 von 9973218045 (hier ist also k = 0): 1/1000 der Ausgangszahl liefert 9973218; anschließendes Halbieren ergibt 4986609. Im zweiten Beispiel sucht er 1/20000 der gleichen Zahl: dies führt über 997321 auf 498660. Der Betrag des absoluten Fehlers ist wegen k = 0 kleiner als $10^{-0} = 1$, nämlich 0.0225 im ersten und 0.90225 im zweiten Beispiel.

Die Faktoren r, s, q und p der vier geometrischen Folgen von oben entsprechen diesen Kriterien nach Einfachheit der Berechnung. Damit also erklärt sich retrospektiv ihre Wahl, und insbesondere nochmals die Wahl von q = 0.9995 als zentralem Faktor.

Die Eingänge der Tabellen I und II. Für Tabelle I ist der Faktor r der geometrischen Folge $0.9999999 = 1 - \frac{1}{10000000}$; es ist also der zehnmillionste Teil abzuziehen. Damit nicht schon zu Anfang ein Abschneidefehler begangen wird, muß Napier zur Sicherung der Genauigkeit an h = 10000000 *mindestens* 7 Dezimalstellen anhängen und mit diesen weiterrechnen; Napier wählt *genau* 7 Dezimalstellen, also $v_0 = h = 10000000.0000000$. Nach 100 Gliedern ist er bei $v_{100} = 9999900.0004950$ angelangt, also *ungefähr* bei 9999900, dem zweiten Eintrag der Tabelle II. Für diese ist der Faktor s der geometrischen Folge $0.99999 = 1 - \frac{1}{100000}$; es ist also der hunderttausendste Teil abzuziehen. Daher muß Napier hier an h mindestens 5 Dezimalstellen anhängen – tatsächlich wählt er $z_0 = h = 10000000.000000$, also 6 Dezimalen –, und mit diesen weiterrechnen. Nach 50 Gliedern wäre Napier mit richtiger Rechnung bei 9995001.224826 angelangt, also *ungefähr* bei $x_{0,1} = 9995000$ aus Tabelle III. Hier ist ihm auf dem Weg zu diesem – wie man schon weiß und auch später nochmal sehen wird, äußerst bedeutungsvollen – Wert jedoch ein Fehler passiert, der ihn auf z_{50} = 9995001.22**2927** kommen läßt. Der Unterschied beträgt zwar nur 0.001899, ist aber leider nicht vernachlässigbar.

Die Eingänge der Tabelle III. Die Doppelfolge $x_{m,n} = 0.99^m 0.9995^n h$ $(0 \le m \le 68, 0 \le n \le 20)$ umfaßt 1449 als Matrix angeordnete Einträge (in 21 Zeilen und 69 Spalten). Bei festgehaltenem m entstehen alle $x_{m,n}$-Werte von n = 0 ausgehend durch Anwendung des Faktors $0.9995 = 1 - \frac{1}{2000}$ aus dem unmittelbaren Vorgänger in der gleichen Spalte; bei festgehaltenem n entstehen alle $x_{m,n}$-Werte von m = 0 ausgehend durch Anwendung des Faktors $0.99 = 1 - \frac{1}{100}$ aus dem unmittelbaren Vorgänger in der gleichen Zeile.

Napier berechnet daher ausgehend von $x_{0,0} = h$ zunächst die 1. Spalte $x_{0,n}$ $(0 \le n \le 20)$. Diese Berechnung erfolgt durch Abziehen des jeweils 2000sten Teils (s. o.), wobei für die Division durch 2000 die Regeln des § 15 anzuwenden sind. Die Rechnung geschieht zunächst mit 5 Dezimalen; dann werden die erhaltenen Werte auf 4 Dezimalen (entsprechend den 4 Dezimalen von 0.9995) *abgeschnitten*. Anschließend wird die 2. Spalte durch gliedweises Abziehen des 100sten Teils des entsprechenden Wertes in Spalte 1 berechnet, dann die 3. aus der 2. usw., bis die 69. Spalte berechnet ist (es ist nach dem Vorangegangenen wohl selbstverständlich, daß Napier angesichts der beiteiligen Faktoren nicht zeilenweise berechnet).

Die noch 5-stellige Spalte 1 der Tabelle III sähe bei Napier so aus, wobei nur die sechs Werte aufgeführt sind, die auch von Napier an der jeweiligen Position mitgeteilt werden:

10000000.00000
9995000.00000
9990002.50000
9985007.49875
9980014.99501
...
9900473.57811

Der Konjunktiv steht, weil Napiers eigene Tabelle in der letzten Zeile eine Abweichung verzeichnet; er hat 9900473.578**08** statt 9900473.57811 (Zwischenschritte sind ja, s. o., nicht angegeben, so daß das Entstehen dieses und ähnlicher Fehler nicht lokalisiert werden kann). Bei korrekter Ausführung der weiteren Rechnung, ausgehend von den nun auf 4 Dezimalen abgeschnittenen Werten der ersten Spalte, ergäbe sich für die Eingänge der Tabelle III:

10000000.0000	9900000.0000	9801000.0000	...	5048858.8900
9995000.0000	9895050.0000	9796099.5000	...	5046334.4605
9990002.5000	9890102.4750	9791201.4503	...	5043811.2932
9985007.4987	9885157.4238	9786305.8496	...	5041289.3880
9980014.9950	9880214.8451	9781412.6967		5038768.7435
...	...	...	...	...
9900473.5781	9801468.8424	9703454.1540	...	4998609.4044

Zum Vergleich Napiers Werte, die sich an wenigen Stellen um eine Einheit der letzten, vierten Dezimalstelle unterscheiden, sowie wahrscheinlich einen Zahlendreher im allerletzten Eintrag besitzen (Abweichungen in Fettdruck):

10000000.0000	9900000.0000	9801000.0000	...	5048858.8900
9995000.0000	9895050.0000	9796099.5000	...	5046334.4605
9990002.5000	9890102.4750	9791201.4503	...	5043811.2932
9985007.4987	9885157.423**7**	9786305.849**5**	...	5041289.38**79**
9980014.9950	9880214.8451	9781412.6967		5038768.7435
...	...	...	...	...
9900473.578**0**	9801468.842**3**	9703454.15**39**	...	4998609.40**34**

Die Abweichungen sind minimal: in Zeile 4 betragen sie gegenüber den richtigen Werten ab der 2. Spalte *eine* Einheit der 4. Dezimalstelle nach unten, weil Napier den Wert $x_{1,3}$ zu 9885157.423**7** statt zu 9885157.4238 berechnet hat, und diese Abweichung sich bis in die letzte Spalte durchzieht. In der letzten Zeile produziert der ebenfalls um *eine* Einheit nach unten abweichende Napiersche Anfangswert 9900473.578**0** (statt 9900473.5781) eine sich durchziehende Abweichung von ebenfalls *einer* Einheit der 4. Dezimalstelle nach unten. Der allerletzte Eintrag $x_{68,20}$ müßte bei Napier deshalb also

4998609.40**43** lauten (*eine* Einheit der 4. Dezimalstelle nach unten gegenüber dem richtigen 4998609.4044); Napiers 4998609.40**34** ist vielleicht nur ein Zahlendreher, könnte aber auch die Folge eines Fehlers im Verlauf der Berechnung dieser Zeile sein (dies wäre nur durch den Rückgriff auf das anscheinend nicht mehr existierende Manuskript zu klären). Alle anderen Einträge sind – unter Beachtung der von ihm selbst aufgestellten Rundungsregeln für Teile – korrekt.

LN(9999999). Für die Logarithmen der Zahlen v_k *in* Tabelle I muß nur LN(v_1) = LN(9999999) bekannt oder optimal eingegrenzt sein; dies ist weiter oben bereits mit

$$1.0000000 < \mathrm{LN}(9999999) < 1.0000001$$

geschehen.

Logarithmen für Zahlen im Bereich der Tabelle I. Für LN(v_k) folgen die Schranken

$$k \cdot 1.0000000 < \mathrm{LN}(v_k) < k \cdot 1.0000001 \quad (0 \le k \le 100).$$

So ist (Napiers Beispiel hierzu) v_{25} = 9999975.0000300, der Logarithmus dieser Zahl also eingegrenzt durch 25.0000000 und 25.0000025.

Logarithmen für Zahlen v, die nicht unmittelbar in Tabelle I erscheinen, aber *in ihren Bereich* fallen, gewinnt Napier in § 41 durch die Verwendung von § 40. Dessen Abschätzung ist um so schärfer, je näher a und b beieinanderliegen (s. o.), also z. B. mit b = a + ε, bzw. b – a = ε, und möglichst kleinem ε:

$$\frac{h \cdot \varepsilon}{a + \varepsilon} < \mathrm{LN}(a) - \mathrm{LN}(a + \varepsilon) < \frac{h \cdot \varepsilon}{a}.$$

Nun ist in Tabelle I der Abstand ε einer beliebigen Zahl v *aus ihrem Bereich* zur nächstgelegenen Zahl v_k *in* der Tabelle höchstens ε = ½, also sicher klein (insbesondere im Vergleich zu v oder v_k). Napier setzt zur Illustration das vorige Beispiel fort: gesucht sei LN(v) = LN(9999975.5000000). Der zu v = 9999975.5000000 nächstgelegene Wert in Tabelle I ist v_{25} = 9999975.0000300. a = v_{25} = 9999975.0000300, b = v = 9999975.5000000 liefert ε = 0.4999700, und damit h · ε = 4999700. Dann ist, bei Napier der Deutlichkeit halber hier sogar auf 8 Dezimalstellen ausgeführt,

$$\frac{h \cdot \varepsilon}{b} = \frac{h \cdot \varepsilon}{a + \varepsilon} = 0.49997122, \quad \frac{h \cdot \varepsilon}{a} = 0.49997124\,.$$

Napier argumentiert nun, daß diese beiden Zahlen zwar nach Konstruktion die Differenz LN(a) – LN(a + ε) eingrenzen, aber schon in ihren ersten 7 Dezimalstellen übereinstimmen – und daher die in *beiden* Fällen durch Abschneiden der überflüssigen 8. Dezimale (*est accuratio plusquam requisita*) entstehende Zahl 0.4999712 bereits *die* Differenz zwischen LN(9999975.0000300) und LN(9999975.5000000) darstellt, also gar keine Schranken im engeren Sinn notwendig sind. Anders formuliert: auf die erforderlichen 7 Stellen genau ist diese Differenz nicht nur optimal eingegrenzt, sondern *bekannt*. Daher sind die Schranken für LN(9999975.5000000) jetzt gegeben durch

$$25.0000000 - 0.4999712 < \mathrm{LN}(9999975.5000000) < 25.0000025 - 0.4999712,$$

also

$$24.5000288 < \mathrm{LN}(9999975.5000000) < 24.5000313.$$

Wie Napier dazu sagt: der Logarithmus selbst wird also *optimè* durch den Mittelwert 24.5000300 dargestellt.

Nochmals: Mittelwerte. Napier *berechnet* zwar hier schon den Mittelwert, verwendet ihn aber nicht weiter, sondern bleibt bei seiner Behandlung mit Schranken (sofern nicht, wie im obigen Beispiel, obere und untere Schranke identisch sind). Das gilt nicht nur für diesen soeben exemplarisch von ihm vorgeführten Fall – der von ihm wirklich nur *des Beispiels halber* ausgeführt wird –, sondern auch für den nachfolgenden und auf die gleiche Weise berechneten Wert LN(9999900) – den er ja wirklich benötigt, um die LN-Werte der Tabelle II zu ermitteln. Tatsächlich hätte sich Napier das Leben ein wenig leichter machen können, indem er etwas früher als erst zum Schluß zu Mittelwerten übergeht. Wie dieses Beispiel nämlich zeigt (und die folgenden Rechnungen ebenfalls erweisen werden), verwendet Napier ab nun *bei den Logarithmen-Schranken* nur noch Additionen und Subtraktionen. Da aber die Bildung des arithmetischen Mittels mit Addition und Subtraktion (nicht aber mit Multiplikation und Division) verträglich ist (kurz: $\overline{a \pm b} = \bar{a} \pm \bar{b}$), *wenn bei der Mittelwertbildung nicht gerundet wird*, hätte er um den Preis gegebenenfalls einer 8. Dezimalstelle das weitere Mitschleppen von je zwei Schranken vermeiden können.– Doch nun wieder zu

LN(9999900). Für die LN-Werte von Zahlen *in* Tabelle II muß $LN(z_1) = LN(9999900)$ bekannt oder optimal eingegrenzt sein. Der zu $z_1 = 9999900$ nächste Wert in Tabelle I ist $v_{100} = 9999900.0004950$. $b = v_{100}$, $a = z_1 = 9999900$ liefert $\varepsilon = 0.0004950$, $h \cdot \varepsilon = 4950$. Für die beiden Schranken der Differenz LN(9999900.0000000) – LN(9999900.0004950) erhält Napier beide Male (auf 7 Dezimalstellen) 0.0004950, so daß 0.0004950 *die* Differenz darstellt (s. obiges Beispiel). Also ist

$$100.0000000 + 0.0004950 < LN(9999900) < 100.0000100 + 0.0004950,$$
$$100.0004950 < LN(9999900.0000000) < 100.0005050$$

(der Logarithmus selbst kann mit dem Mittelwert 100.0005000 *optimè* angesetzt werden; s. auch hier das obige Beispiel und den dazu nachfolgenden Passus).

Logarithmen für Zahlen im Bereich der Tabelle II. Logarithmen der Zahlen z_l *in* Tabelle II haben daher die Schranken

$$l \cdot 100.0004950 < LN(z_l) < l \cdot 100.0005050 \quad (0 \le l \le 50).$$

Insbesondere für $l = 50$ ist $5000.0247500 < LN(9995001.224826) < 5000.0252500$. Für Zahlen z, die *in den Bereich* der Tabelle II fallen (aber nicht exakt mit einer Zahl aus dieser Tabelle übereinstimmen), hält Napier in § 43 eine Überraschung bereit: Es wird nämlich nicht sofort § 40 verwendet, sondern zur Beibehaltung der hohen Genauigkeit in einem Zwischenschritt Tabelle I herangezogen:

Sei z_l die zu z nächstgelegene Zahl aus Tabelle II; der Einfachheit halber sei zunächst $z_l > z$. Dann bestimmt Napier eine Zahl v aus der Proportion $v : h = z : z_l$ oder, mit anderen Worten, $v = hz/z_l$. Diese Zahl v liegt immer zwischen 9999900 und 10000000, *fällt also in den Bereich der Tabelle I*. Damit transportiert Napier die Genauigkeit der Tabelle-I-Werte in die Tabelle II. Weil v zu h sich wie z zu z_l verhält, sind nach § 36 die Differenzen der Logarithmen gleich:

$$LN(z) - LN(z_l) = LN(v) - LN(h) = LN(v), \text{ also}$$
$$LN(z) = LN(z_l) + LN(v).$$

Mithilfe der an dieser Stelle bei Napier immer noch verwendeten Schranken formuliert: es müssen zu den Schranken von LN(z_l) die Schranken für LN(v) addiert werden (nach § 8), die man aus dem oben angegebenen Verfahren für Tabelle I erhält, und man hat die Schranken für LN(z).

Für den Fall $z_l < z$ ist die Proportion in $v : h = z_l : z$ umzustellen (was jetzt LN(z) = LN(z_l) – LN(v) nach sich zieht), die Schranken für LN(v) sind aus Tabelle I zu bestimmen, und gemäß § 10 von den Schranken für LN(z_l) zu subtrahieren.

Erleichterung des Rechenaufwands durch geeignete Umformungen. Daß Napier, dem ja allenfalls seine Stäbchen zur Erleichterung des numerischen Rechnens zur Verfügung standen, selbst kleinsten Rechenvorteilen Aufmerksamkeit schenkte, zeigt sich durch einen Einschub, den er bei dieser Gelegenheit vornimmt. Er weist nämlich darauf hin, daß es für die Berechnung der vierten Proportionalen v neben

$$v = \frac{h \cdot z}{z_1} \quad \text{bzw.} \quad v = \frac{h \cdot z_1}{z}$$

einen zweiten Weg gibt, den er als leichter bezeichnet (*modo faciliore*), nämlich

$$v = h - \frac{h \cdot (z_1 - z)}{z_1} \quad \text{bzw.} \quad v = h - \frac{h \cdot (z - z_1)}{z}.$$

Algebraisch sind die Formeln natürlich äquivalent, aber nicht mehr numerisch, sobald eine vorgegebene oder begrenzte Stellenzahl im Spiel ist. Die behauptete Erleichterung ist offensichtlich: $z - z_l$ hat in den bei Napier vorkommenden Fällen (z_l liegt nahe bei z) deutlich weniger Ziffern als z_l oder z, die Division wird also wesentlich erleichtert; die beiden zusätzlichen Subtraktionen kosten dieser Ersparnis gegenüber praktisch keine Rechenarbeit. Es ist an einigen Stellen der *Constructio* zu erkennen, daß Napier tatsächlich die zweite Berechnungsvariante verwendet (man kann dies manchmal beim Nachrechnen an der letzten mitgeteilten Dezimale sehen).

LN(9995000). Dies wird gleich auf LN($x_{0,1}$) = LN(z) = LN(9995000), den ersten der beiden für Tabelle III notwendigen LN-Werte, angewendet: Es ist $v : h = z : z_{50}$ = 9995000 : 9995001.224826 (denn z_{50} ist z am nächsten), also

$$v = \frac{h \cdot 99950000}{9995001.224826} = 9999998.7745614.$$

v fällt in den Bereich von Tabelle I und hat dort als nächstgelegenen Wert die Zahl v_1 = 9999999.0000000; die Differenz ε beträgt 0.2254386. Die Schranken der Logarithmen-Differenz sind beide Male auf 7 Dezimalen übereinstimmend ebenfalls 0.2254386. Wegen 1.0000000 < LN(9999999) < 1.0000001 ist dann (Addition gemäß § 8)

$$1.2254386 < \mathrm{LN}(9999998.7745614) < 1.2254387.$$

Die Schranken für LN(9995001.224826) sind bekannt (5000.0247500 und 5000.0252500); also ergibt sich für die untere Schranke von LN(9995000) nach § 8 nun 5000.0247500 + 1.2254386 = 5001.2501886 bzw. für die obere Schranke 5000.0252500 + 1.2254387 = 5001.2506887. *Hier nun* entscheidet sich Napier für die Mittelwertbildung (s. o.) und bemerkt, daß das (7-stellige) Mittel zwischen diesen beiden Werten *absque sensibili errore* als Wert von LN(9995000) genommen werden dürfe (schwache Eingrenzung, s. o.):

$$\mathrm{LN}(9995000) = \frac{5001.2501886 + 5001.2506887}{2} = 5001.2504386.$$

(NB: Hätte Napier sich nicht verrechnet – s. anschließend –, so wäre er mit *diesem* Wert für $\mathrm{LN}(x_{0,1})$ übrigens gerade einmal $2 \cdot 10^{-5}$ vom *wahren* Wert entfernt. $5 \cdot 10^{-4}$ hingegen wäre die "skeptische" Obergrenze für den Fehler an dieser Stelle.)

Der entscheidende Rechenfehler Napiers. Napier hat sich, wie bereits erwähnt, bei der Bestimmung von z_{50} verrechnet, und zwar im Vergleich zu den kleinen Fehlern in Tabelle III beträchtlich. Dies zieht sich, wie man nun sieht, als Folgefehler in seine Berechnung von LN(9995000) durch; denn Napier gelangt auf dem oben beschriebenen Weg – unter Verwendung seiner Erleichterungsumformung – über

$$v = \frac{h \cdot 9995000}{9995001.222\mathbf{2927}} = h - \frac{h \cdot 1.222\mathbf{2927}}{9995001.222\mathbf{2927}} = 9999998.7764614$$

zu den Schranken $5001.2482886 < \mathrm{LN}(9995000) < 5001.248788\mathbf{8}$ und erhält als Mittel $\mathrm{LN}(9995000) = 5001.2\mathbf{485387}$ (eigentlich 5001.2485386, da ihm noch ein marginaler Rundungsfehler unterläuft). Die Abweichung zum oben berechneten richtigen Wert beträgt $-0.0018999 \approx -0.002$. Ein Fehler Δx bei x führt für großes x und kleines Δx mit

$$\mathrm{LN}(x + \Delta x) = h \cdot \ln\frac{h}{x + \Delta x} = h \cdot \ln(\frac{h}{x} \cdot \frac{x}{x + \Delta x}) = h \cdot \ln\frac{h}{x} + h \cdot \ln\frac{x}{x + \Delta x} =$$
$$= \mathrm{LN}(x) + h \cdot \ln(1 - \frac{\Delta x}{x + \Delta x}) \approx \mathrm{LN}(x) - h\frac{\Delta x}{x + \Delta x} \approx \mathrm{LN}(x) - h\frac{\Delta x}{x}$$

zu einem Fehler in LN(x), der hier (da im konkreten Fall $x = 0.9995h \approx h$ ist) praktisch den gleichen Betrag wie Δx besitzt. Der LN-Fehler vervielfacht sich bis h/2 um $69 \cdot 20 = 1380 \approx 1400$ auf ca. $2.8 \approx 3$ – diese *drei* Einheiten sind also Napiers *maximale* Abweichung als Folgefehler.

Die Logarithmen für Zahlen im Bereich der 1. Spalte der Tabelle III. Nun kann Napier alle Logarithmen (bzw. LN-Schranken) der *ersten* Spalte (m = 0) aus Tabelle III angeben: $\mathrm{LN}(x_{0,n}) = n \cdot 5001.2504386$ (bzw. hat die Schranken $n \cdot 5001.2501886$ und $n \cdot 5001.2506887$); insbesondere ist

$$100025.0037720 < \mathrm{LN}(x_{0,20}) = \mathrm{LN}(9900473.57811) < 100025.0137740$$

(der bei Napier zu findende Mittelwert für $\mathrm{LN}(x_{0,20})$ ist hier schon mit dem verzwanzigfachten Fehler von LN(9995000) behaftet, also mit $-0.037998 \approx -0.04$). Für die Bestimmung der Logarithmen von Zahlen x *im Bereich der 1. Spalte der Tabelle III* wendet Napier das oben für Logarithmen im Bereich der Tabelle II benutzte Verfahren *iteriert* an: Zunächst wird der zu x nächstgelegene Wert $x_{0,n}$ in der ersten Spalte ermittelt; dann wird (für $x > x_{0,n}$) die Proportion $z : h = x_{0,n} : x$ aufgestellt und gelöst (bzw. für $x < x_{0,n}$ die Proportion $z : h = x : x_{0,n}$). Die Zahl z liegt jedenfalls im Bereich zwischen 9995000 und 9999900, fällt also in den Bereich der Tabelle II. Also muß ihr LN-Wert nun, sofern sie nicht schon zufällig mit einem z_l in Tabelle II übereinstimmt, nach dem bereits früher angegebenen Verfahren mit einer weiteren Proportion $v : h = z : z_l$ (oder $v : h = z_l : z$, falls $z_l < z$ ist) aus Tabelle I ermittelt werden.

LN(9900000). Die Zahl $x = x_{1,0} = 9900000$ fällt in den Bereich der 1. Spalte der Tabelle III; nach der eben skizzierten Methode kann nun LN(9900000) ermittelt werden.

- Der zu x = 9900000 nächstgelegene Eintrag der ersten Spalte der Tabelle III ist deren letzter: $x_{0,20}$ = 9900473.57811 > x ($x_{0,20}$ wird hier – wie auch von Napier selbst – mit 5 Dezimalen benutzt).
- Die Proportion für z lautet daher z : h = x : $x_{0,20}$ = 9900000 : 9900473.57811. Man erhält z = 9999521.6611546 (z wird nicht mit 6 Dezimalen berechnet, sondern gleich mit 7, weil es in der nächsten Proportion mit Zahlen, die 6 bzw. 7 Dezimalen besitzen, in Verbindung gebracht wird).
- Der zu z nächstgelegene Eintrag der Tabelle II ist z_5 = 9999500.010000 < z. Nun ist die Proportion v : h = z_5 : z = 9999500.010000 : 9999521.6611546 zu lösen; sie hat das Ergebnis v = 9999978.3478096.
- Der zu v nächstgelegene Eintrag der Tabelle I ist v_{22} = 9999978.0000231 < v, und ab hier geht die ganze Prozedur rückwärts:
- Die beiden Schranken für LN(v_{22}) – LN(v) sind auf 7 Dezimalstellen identisch: 0.3477872. Die Schranken für LN(v_{22}) sind 22.0000000 und 22.0000022, also sind die Schranken für LN(v) jetzt 21.6522128 und 21.6522150.
- Die Schranken von LN(z_5) sind 500.0024750 und 500.0025250; also ergeben sich die Schranken für LN(z) aus 500.0024750 – 21.6522150 und 500.0025250 – 21.6522128 zu 478.3502600 und 478.3503122 (die Subtraktion ist auszuführen gemäß § 10).
- Die Schranken von LN($x_{0,20}$) sind 100025.0037720 und 100025.0137740; hierzu sind die Schranken von LN(z) zu addieren, um die Schranken für LN(x) = LN(9900000) zu erhalten. Sie betragen daher 10503.3540320 und 10503.3640862 mit Mittelwert 10503.3590591.

Diese Zahl 10503.3590591 wird daher als *absque sensibili errore* für LN(9900000) genommen (erneut ein Fall von *schwacher* Eingrenzung). NB: Vom wahren Wert wäre Napier hier lediglich $5 \cdot 10^{-4}$ entfernt, während die "skeptische" Obergrenze für den Fehler an dieser Stelle schon 10^{-2} beträgt.

Dieser Wert ist natürlich *nicht der bei Napier zu findende*, da – wie man sieht – auch LN(9900000) über LN($x_{0,20}$) auf LN(9995000) zurückgreift, dessen Wert ja einen nicht vernachlässigbaren Fehler aufweist. Die Rechnung bei Napier führt auf dem gleichen Weg wie oben skizziert zu LN(9900000) = 10503.3**210291**, liefert also einen um 0.03803 zu kleinen Wert.

Die Vervollständigung der Tabelle III zur Grundtabelle. Nun sind alle Logarithmen zu Zahlen der Spalten 2 bis 69, also für $x_{m,n}$ ($1 \le m \le 68$, $0 \le n \le 20$) durch jeweilige Addition von LN(9900000) aus den Logarithmen der linken Vorgänger $x_{m-1,n}$ zu erhalten. Kompakt für die ganze Tabelle III geschrieben heißt das:

$$\begin{aligned} LN(x_{m,n}) &= m \cdot LN(9900000) + n \cdot LN(9995000) = \\ &= m \cdot 100503.3590591 + n \cdot 5001.2504386 \end{aligned}$$

(mit den richtigen Werten; bei Napier entsprechend

$$LN(x_{m,n}) = m \cdot 100503.3\mathbf{210291} + n \cdot 5001.2\mathbf{485387}).$$

Rundung auf eine Dezimale. Die Werte LN($x_{m,n}$) werden so mit sieben Dezimalstellen durch sukzessive Additionen berechnet, dann aber nur noch mit einer Dezimalstelle, die jetzt durch *korrekte Rundung* und *nicht durch Abschneiden* entsteht, eingetragen. Damit ist die Tabelle III zur Grundtabelle vervollständigt. Eigentlich könnte man meinen, daß alle Dezimalen nun zu entfernen wären, da insbesondere in den letzten Spalten der akkumulierte Fehler fast die Genauigkeitsgrenze erreicht hat. Man beachte aber, daß Napier hier durch die korrekte Rundung den Fehler nochmals minimiert. Der Grund für die Beibehaltung einer Dezimale ist jedoch ein anderer: zu den gerade berechneten LN-Werten der Grundtabelle müssen bei der Berechnung von LN(x) für ein nicht in der Grundtabelle stehendes x noch Zahlen addiert oder von ihnen subtrahiert werden; erst das Ergebnis dieser Addition oder Subtraktion liefert einen Eintrag in die Logarithmentafel (s. anschließend). Daher ist – auch dies ein heute wohlbekannter Sachverhalt, der aber schon Napier nicht entgangen war – jeder Summand, weil durch Rundung entstanden, mit (mindestens) einer sog. Überstelle – hier also der fraglichen einen Dezimalstelle – in die Addition bzw. Subtraktion einzuführen, und *erst nachdem* addiert oder subtrahiert wurde, erfolgt die korrekte Rundung auf Tafelgenauigkeit, also auf dezimalstellenfreie natürliche Zahlen.

5. Letzte Hand

Interpolation. Mit der Grundtabelle ist das Gerüst gegeben, das die Interpolation für Argumente *im Bereich* der Grundtabelle nach § 40 zuläßt, wobei sogar großzügig verfahren werden kann. Diese Argumente sind ihrer Natur nach (da sie ja eigentlich Einträge der SIN-Tabelle sind) ab jetzt nur noch ganzzahlig. Zuvor stellt Napier fest:

LN(9996700) bis LN(10000000). Ist $9996700 \le x \le 10000000$, so ist $LN(x) = h - x$. Denn nach § 29 ist insbesondere für $x = 9996700$

$$h - 9996700 = 3300 < LN(9996700) < 3301 = \frac{h \cdot 3300}{9996700} = \frac{h \cdot (h - 9996700)}{9996700};$$

die Schranken unterscheiden sich also hier gerade um eine Einheit. Also ist LN(9996700) optimal (stark) eingegrenzt, so daß insbesondere die untere Schranke 3300 als *der* Wert akzeptiert werden kann. *A fortiori* gilt dies erst recht für $9996700 < x \le 10000000$.

LN(5000000) bis LN(9996699). Die Interpolationsvorschrift für Werte x zwischen 5000000 und 9996699 basiert auf § 40 in Verbindung mit § 35 und lautet: Man suche den zu x nächstgelegenen Wert $x_{m,n}$ aus der Grundtabelle, bilde – gemäß § 40 – die Differenz $\varepsilon = x_{m,n} - x$ (oder $x - x_{m,n}$, wenn $x_{m,n} < x$ ist; im Weiteren sei jedoch zur Illustration nur $x_{m,n} > x$ betrachtet), und multipliziere sie mit h. Dieser Wert wird nun jedoch nicht mehr durch $x_{m,n}$ *und* x geteilt, um die untere bzw. obere Schranke zu erhalten und anschließend daraus das Mittel zu bilden, *sondern lediglich durch einen numerisch möglichst einfachen Wert* $\bar{x} \text{ mit } x \le \bar{x} \le x_{m,n}$. Der so entstehende Quotient wird von Napier als *die* Differenz $LN(x) - LN(x_{m,n})$ betrachtet und muß nur zu $LN(x_{m,n})$ addiert werden, damit LN(x) entsteht. Die Rechnung für den Quotienten ist dabei auf *eine* durch Abschneiden entstehende Dezimale auszuführen, das Ergebnis nach Addition hingegen korrekt auf ganze Zahlen zu runden (s. o.).

An *dieser* Stelle, über die bisher alle Autoren hinweggegangen sind oder sie völlig mißverstanden haben, hängt die oben vorgenommene Rekonstruktion von Napiers Überlegungen. Denn dieser überraschende und den Rechenaufwand nochmals stark reduzierende Schritt (nur noch *eine* einzige Division statt *zweier* plus Mittelwertbildung) funktioniert überhaupt nur, weil für aufeinanderfolgende Einträge der Grundtabelle q = 0.9995, also die in Abschnitt 2 erwähnte Genauigkeitsbedingung erfüllt ist (bei Napier ist dieser Sachverhalt schlicht hinter der Bemerkung über die Quotienten, *quorum nullus à vera artificialium differentia errore sensibili differet, propter propinquitatem numerorum Tabulæ* ohne weitere Ausführungen oder gar Erklärungen gut versteckt).

Alle nachfolgenden Beispiele sind ab jetzt *mit Napiers fehlerhaften Zahlen* gerechnet, damit sie gegebenenfalls anhand der *Constructio* nachvollzogen werden können:

Beispiel 1: x = 7489557 [= SIN($48^0$30'), wie Napier allerdings nicht verrät]. Hier ist das nächstgelegene $x_{m,n} = x_{28,15}$ = 7490786.6119. Als numerisch einfacher Wert $\overline{x}$ zwischen x und $x_{28,15}$ bietet sich sofort 7490000 an. Die Differenz $x_{28,15} - x$ beträgt 1229.6119; mit h multipliziert und durch $\overline{x}$ geteilt erhält man 1641.6 [bei Napier fälschlich 164**0.1**]. Zu Napiers Wert für LN($x_{28,15}$) = 2889111.7 addiert, kommt 2890753.3 [bei Napier als Folgefehler 289075**1.8**]; Runden liefert schließlich LN(7489557) = 2890753 [289075**2**].

Beispiel 2: x = 7071068 [unschwer als $\mathrm{SIN}(45^0) = \frac{\sqrt{2}}{2}10^7$ zu erkennen]. Das nächstgelegene $x_{m,n}$ ist $x_{34,10}$ = 7070084.4434; als $\overline{x}$ bietet sich 7071000 an. Die Differenz $x - x_{34,10}$ ist 983.5566; Multiplikation mit h und Division durch $\overline{x}$ liefert 1390.9. Jetzt ist dieser Wert von Napiers Wert für LN($x_{34,10}$) = 3467125.4 zu subtrahieren (da $x > x_{m,n}$); das Ergebnis ist 3465734.5, also aufzurunden auf LN(7071068) = 3465735.

Beispiel 3 (es ist bei Napier nicht explizit ausgeführt): x = 5000000 = h/2. Hier ist der nächstgelegene Wert der Grundtabelle $x_{68,19}$ = 5001109.9593; Napier hat dessen Logarithmus zu 6929249.6 erhalten. Die Differenz $x_{68,19} - x$ beträgt 1109.9593; als einfachsten und ungefähr in der Mitte gelegenen Divisor $\overline{x}$ scheint Napier hier 5000500 genommen zu haben, woraus 2219.6 entsteht; zu 6929249.6 addiert erhält man 6931469.2 als LN(5000000). [Eine später verwendete Rechnung auf 2 Dezimalstellen geht von LN($x_{68,19}$) = 6929249.55 aus, berechnet den Quotienten nun zu 2219.69 und gelangt zu 6931469.24 – Napier gibt 6931469.2**2** an, was an einem etwas anders gewählten Divisor $\overline{x}$ liegen könnte].

Fertigstellung. Mit diesen Regeln berechnet Napier nun die 3601 Logarithmen LN(SIN(α)), α = $30^0$0' (1') $90^0$0'. Damit sind zwei Drittel der Napierschen Logarithmentafel fertig. Es geht nun darum, das restliche Drittel zu berechnen. Hierzu entwickelt Napier zwei prinzipiell unterschiedliche Methoden:

Erweiterung über den Bereich [5000000,10000000] hinaus (1). Dies gelingt z. B. über Verdoppelung und Verzehnfachung – auch in Kombination:

§ 51: Ist a = 2b, oder a = 4b, oder a = 8b, so ist (mit Napiers Zahlen)

LN(b) = LN(a) + 6931469.22, oder
LN(b) = LN(a) + 13862938.44, oder
LN(b) = LN(a) + 20794407.66.

Der Beweis ist kurz und elegant und geht von a = 2b aus: da dann b : a = h/2 : h ist, gilt LN(a) + LN(h/2) = LN(b) + LN(h) = LN(b). Nach dem Obigen ist LN(h/2) = LN(5000000) = 6931469.22, und damit schon die gesamte Behauptung bewiesen, denn für $a = 2^i b$ mit i = 2 oder i = 3 braucht nur § 36 angewendet zu werden. Die Berechnung auf 2 Dezimalen ist notwendig, weil mit 1, 2 oder 3 multipliziert wird (siehe auch anschließend).

§ 52: Ist a = 10b, oder a = 100b, oder a = 1000b usw., so ist (mit Napiers Zahlen)

LN(b) = LN(a) + 23025842.34, oder
LN(b) = LN(a) + 46051684.68, oder
LN(b) = LN(a) + 69077527.02 usw.

Zum Beweis für a = 10b verwendet Napier LN(8000000) = 2231434.68, den er offenbar zu diesem Zweck wie schon oben LN(5000000) eigens dafür auf 2 Dezimalen berechnet hat. Nun ist einerseits LN(8000000) = LN(8·1000000), und nach § 51 daher LN(1000000) = LN(8000000) + 20794407.66 = 2231434.68 + 20794407.66 = 23025842.34. Andererseits ist 1000000 = h/10, und daher b : a = h/10 : h, also LN(a) + LN(h/10) = LN(b) + LN(h) = LN(b). Wegen LN(h/10) = 23025842.34 folgt die Behauptung; die Erweiterung auf a = 10^jb mit j > 1 ist klar.

Die sogenannte *short table*. Für die Verhältnisse a : b = 2, 4, 8, 10, 20, 40, 80, 100, ... 4000000, 8000000 und 10000000 stellt Napier in § 53 eine 28 Einträge umfassende Tabelle auf, die seit Macdonalds Übersetzung (Napier 1889) den Namen *short table* erhalten hat (bei Napier selbst führt sie keinen). Diese Tabelle enthält die entsprechenden Kombinationen $2^i 10^j$ und die Logarithmendifferenzen i · 6931469.22 + j · 23025842.34, um LN(b) durch Addition aus LN(a) zu erhalten, wenn a = $2^i 10^j$b ist. Die Berechnung von LN(1000000) und LN(5000000) mit jeweils 2 Dezimalstellen war, wie man jetzt sieht, erforderlich, weil diese Zahlen mit einstelligen Zahlen i bzw. j multipliziert werden, also dadurch ein potentieller Verlust einer zuverlässigen Dezimalstelle droht. Da Napier die erwähnten Logarithmendifferenzen bereits mit einer Dezimale benötigt, um sie zu den ebenfalls mit einer Dezimalen versehenen Zahlen der Grundtabelle zu addieren, kann dem nur durch die entsprechende Genauigkeitssteigerung – vor der Multiplikation mit i bzw. j – um eine weitere Dezimalstelle entgegengewirkt werden.

Da jede ganze Zahl x mit 0 < x < 5000000 durch Multiplikation mit einer der Zahlen aus der *short table* in den Bereich [5000000,10000000] gebracht werden kann, ist ihr LN(x) nun berechenbar.

LN(SIN($2^0$10')). Napiers Beispiel, auf das man später nochmals stoßen wird, ist x = 378064 (an dieser Stelle verrät Napier noch mit keinem Wort, daß es sich bei diesem x um SIN($2^0$10') handelt). Der Multiplikator, um von diesem x in den Bereich [5000000,10000000] zu gelangen, ist offenbar 20 (i = 1, j = 1), zu dem die LN-Differenz 29957311.56 gehört. LN(20 · x) = LN(7561280) kann nicht unmittelbar aus der Grundtabelle entnommen werden, da 7561280 keinen direkten Eintrag besitzt; also muß wie üblich verfahren werden (bei Napier nicht mehr ausgeführt, sondern nur noch als Ergebnis mitgeteilt): Der nächstgelegene Wert ist $x_{27,16}$ = 7562667.8976; die Differenz zu x beträgt also 1387.8976. Als $\overline{x}$ wählt man 7562000, so daß h($x_{27,16}$ – x)/$\overline{x}$ = 1835.3 entsteht. Wegen LN($x_{27,16}$) = 27 · 100503.3210291 + 16 · 5001.2485387 = 2793609.6 [Napiers Werte] kommt LN(7561280) = 2795444.9, also LN(378064) = 2795444.9 + 29957311.56 = 32752756.46 [bei Napier ist 279**6**444.9 für LN(7561280) angegeben, was hier eindeutig als Setzfehler nachzuweisen ist; denn er kommt ebenfalls auf das korrekte Endergebnis von 32752756.4 – bei Napier nur auf eine Dezimale angegeben –, was sonst ja nicht der Fall sein könnte]. Nach Rundung hat man daher LN(378064) = 32752756.

Erweiterung über den Bereich [5000000,10000000] hinaus (2): Ausnutzung der SIN-Eigenschaften. Der zweite Weg, um LN(x) für x < 5000000 zu erhalten, basiert auf einer Identität, die wir heute als

$$\sin(\alpha) = 2\sin(\frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\alpha}{2}) = 2\sin(\frac{\alpha}{2})\sin(90^0 - \frac{\alpha}{2})$$

kennen, und die von Napier geometrisch in § 55 in der Form

$$\frac{\mathrm{SIN}(90^0)}{2} : \mathrm{SIN}(\frac{\alpha}{2}) = \mathrm{SIN}(90^0 - \frac{\alpha}{2}) : \mathrm{SIN}(\alpha)$$

formuliert und bewiesen wird. Von der Übereinstimmung überzeugt man sich sofort, wenn man $\mathrm{SIN}(\alpha) = h \cdot \sin(\alpha)$ und $\mathrm{SIN}(90^0 - \alpha) = \mathrm{COS}(\alpha) = h \cdot \cos(\alpha)$ benutzt.

Über den Sonderfall $\alpha = 90^0$, also – nach Auflösen der Proportion – $\mathrm{SIN}^2(45^0) = h^2/2$, daraus mit § 37 dann $2 \cdot \mathrm{LN}(\mathrm{SIN}(45^0)) = \mathrm{LN}(h) + \mathrm{LN}(h/2) = \mathrm{LN}(h/2) = \mathrm{LN}(5000000)$, wodurch er übrigens – praktisch nochmals, aber jetzt explizit – LN(5000000) mithilfe des oben hergeleiteten $\mathrm{LN}(7071068) = \mathrm{LN}(\mathrm{SIN}(45^0))$ zu $2 \cdot \mathrm{LN}(\mathrm{SIN}(45^0)) = 2 \cdot 3465734.5 = 6931469$ bestimmt, kommt Napier mit Hilfe von § 38 zur allgemeinen Formulierung in Logarithmen,

$$\mathrm{LN}(\frac{\mathrm{SIN}(90^0)}{2}) - \mathrm{LN}(\mathrm{SIN}(\frac{\alpha}{2})) = \mathrm{LN}(\mathrm{SIN}(90^0 - \frac{\alpha}{2})) - \mathrm{LN}(\mathrm{SIN}(\alpha)) .$$

Da $\mathrm{LN}(\mathrm{SIN}(90^0)/2) = \mathrm{LN}(5000000)$ bekannt ist, und für einen Wert α mit $45^0 \le \alpha \le 90^0$ sowohl $\mathrm{SIN}(\alpha)$ als auch $\mathrm{SIN}(90^0 - \alpha/2)$ im Bereich [5000000,10000000] liegen – mehr noch: im Bereich [7071068,10000000] – und damit ihre LN-Werte bekannt sind, kann $\mathrm{LN}(\mathrm{SIN}(\alpha/2))$ berechnet werden. Napier berechnet als Beispiel aus $\mathrm{LN}(\mathrm{SIN}(69^0 20'))$ den Wert von $\mathrm{LN}(\mathrm{SIN}(34^0 40'))$ zu 5642242 (siehe anschließend). Auf diese Art können, sobald $\mathrm{LN}(\mathrm{SIN}(45^0))$ ... $\mathrm{LN}(\mathrm{SIN}(90^0))$ vorliegen, zunächst die Logarithmen bis $\mathrm{LN}(\mathrm{SIN}(22^0 30'))$, dann bis $\mathrm{LN}(\mathrm{SIN}(11^0 15'))$, dann bis $\mathrm{LN}(\mathrm{SIN}(5^0 38'))$ usw. berechnet werden (§ 58).

LN(SIN($34^0$40')). Hier sei noch der Vollständigkeit halber, und weil später darauf Bezug genommen wird, das nicht mehr bis ins Detail bei Napier durchgeführte Beispiel der Berechnung von $\mathrm{LN}(\mathrm{SIN}(34^0 40'))$ aus $\mathrm{LN}(\mathrm{SIN}(69^0 20'))$ explizit nachgerechnet:

$\mathrm{SIN}(69^0 20') = 9356495$. In Tabelle III findet man für m = 6, n = 12 den Eingang 9358467.7710; die Differenz hierzu beträgt –1972.7710, als Divisor wird 9357500 gewählt, und man erhält –2108.2. Da die Tabelle $\mathrm{LN}(x_{6,12}) = 663034.9$ liefert, kommt $\mathrm{LN}(\mathrm{SIN}(69^0 20')) = 665143$.

$\mathrm{SIN}(90^0 – 34^0 40') = \mathrm{SIN}(55^0 20') = 8224751$. In Tabelle III findet man für m = 19, n = 9 den Eingang 8224582.9197; die Differenz hierzu beträgt 168.0803, als Divisor wird 8224600 gewählt, und man erhält 204.3. Da die Tabelle $\mathrm{LN}(x_{19,9}) = 1954574.3$ liefert, kommt $\mathrm{LN}(\mathrm{SIN}(55^0 20')) = 1954370$.

Also ist $\mathrm{LN}(\mathrm{SIN}(34^0 40')) = \mathrm{LN}(5000000) + \mathrm{LN}(\mathrm{SIN}(69^0 20')) – \mathrm{LN}(\mathrm{SIN}(55^0 20'))$
$= 6931469 + 665143 – 1954370 = 5342242$.

Aufdeckung von "Fehlern" durch Vergleich der beiden Methoden. Napier hat auch überprüft, ob beide Methoden zum gleichen Ergebnis kommen(!). Am Beispiel $x = 378064$, wofür oben LN(378064) = 32752756 gefunden wurde, wird dies dem Leser – allerdings ohne ausführliche Rechnung, sondern nur über ihr Ergebnis – vorgeführt: Es ist nämlich $x = \mathrm{SIN}(2^0 10')$, also $\mathrm{LN}(378064) = \mathrm{LN}(\mathrm{SIN}(\alpha))$ für $\alpha = 2^0 10'$. Nun ist aber $16\alpha = 34^0 40'$, und das war Napiers Beispiel für den Übergang von $\mathrm{LN}(\mathrm{SIN}(\alpha))$ zu $\mathrm{LN}(\mathrm{SIN}(\alpha/2))$, das gerade mit $\mathrm{LN}(\mathrm{SIN}(34^0 40')) = 5642242$ endete. Wendet man nun vier weitere Mal diese Regel an, so gelangt man zu $\mathrm{LN}(\mathrm{SIN}(2^0 10')) = 32752741$ (Napier hat hierbei natürlich mit seinem genaueren 6931469.22 für LN(5000000) gerechnet – statt nur mit 6931469 wie oben –, sonst hätte er 32752740 erhalten). Die Abweichung zum früher berechneten Wert 32752756 beträgt jedoch nicht-akzeptable 15 Einheiten, *was Napier auf Fehler in der von ihm benutzten SIN-Tabelle schließen läßt*.

Vorschlag einer noch genaueren Logarithmentafel. Sein Vorschlag zur Abhilfe: man verwende eine 8-stellige Tafel, d. h. eine solche mit $h = 10^8$ (SIN steht also in diesem Absatz kurzzeitig für $10^8\sin$). Napier skizziert, wie seine bisher für $h = 10^7$ ausgelegte Methode entsprechend zu adaptieren wäre:

- Tabelle I wird mit 100 Einträgen v_k und dem Faktor 0.99999999 berechnet; der letzte Wert v_{100} liegt also in der Nähe von 99999900.
- Tabelle II wird daher mit dem Faktor 0.999999 berechnet, sie ebenfalls mit 100 Werten z_l; ihr letzter Wert z_{100} liegt somit in der Nähe von 99990000.
- Tabelle III ist wieder matrix-artig als Doppelfolge organisiert, diesmal mit $x_{m,n} = 10^8 0.99^m 0.9999^n$, $0 \le m \le 34$, $0 \le n \le 100$. Wegen $0.9999^{100} \approx 0.99$ schließt der letzte Wert einer Spalte wieder an den ersten Wert der nachfolgenden Spalte an, und wegen $0.99^{35} < 0.70710678 < 0.99^{34}$ ist jedenfalls der letzte Wert in dieser Tabelle schon kleiner als $70710678 = \mathrm{SIN}(45^0)$.

Daher können nun aus LN(99999999) wie oben alle $\mathrm{LN}(\mathrm{SIN}(\alpha))$-Werte von $\alpha = 45^0 0'$ bis $\alpha = 90^0 0'$ eingegrenzt und berechnet werden; LN(h/2) ergibt sich wieder zu $2\ \mathrm{LN}(\mathrm{SIN}(45^0))$; und schließlich, wie in § 58 beschrieben, erweitert man dann den Bereich der bekannten Logarithmen über $\mathrm{LN}(\mathrm{SIN}(22^0 30'))$, $\mathrm{LN}(\mathrm{SIN}(11^0 15'))$, $\mathrm{LN}(\mathrm{SIN}(5^0 38'))$ usw. auf die gesamte Logarithmentafel. *Diese* Berechnung ist es wohl, die Ursinus für seinen 1624 erschienenen 8-stelligen *Magnus Canon* verwendete; dabei dehnte er noch die Einträge auf eine α-Schrittweite von 10" aus, also von $0^0 0'0''$, $0^0 0'10''$, bis $89^0 59'50''$, $90^0 0'0''$.

Erklärung des "Fehlers". Die von Napier beobachtete Diskrepanz läßt sich erklären. Napier hat aus der SIN-Tafel den Wert 378064 für $\mathrm{SIN}(2^0 10')$ entnommen und ihn durch Multiplikation mit 20 in den Bereich von Tabelle III gebracht, mit dem Ergebnis 7561280. Der Reinholdsche Tafelwert 378064 wäre korrekt, wenn er durch Abschneiden gewonnen wäre, denn es ist mit zwei zusätzlichen Dezimalstellen $\mathrm{SIN}(2^0 10') = 378064.55$; ein Vergleich mit anderen Tafelwerten zeigt jedoch, daß Reinhold üblicherweise korrekt rundete, so daß 378065 in seiner Tafel hätte stehen sollen. Mit dem SIN-Wert der um 2 Dezimalen höheren Genauigkeit, wie sie die Multiplikation mit 20 eigentlich zwingend nahelegt (s. o.), wäre 378064.55 mit 20 zu multiplizieren, was auf 7561291 führt – und LN(7561291) ist tatsächlich *genau um die fraglichen 15 Einheiten kleiner* als LN(7561280). Die Lösung besteht also darin, daß bei der ersten Methode – dem Hochmultiplizieren einer Zahl x mit $0 < x < 5000000$ in den

Bereich von Tabelle III – Fehler im Ausgangswert x stark vergrößert werden, was *notwendigerweise* zu Folgefehlern bei der Berechnung von LN(x) führt. Dieser Fehler ist aber zugleich *unvermeidlich*, weil auch bei Verwendung des korrekt gerundeten Werts 378065 die Multiplikation mit 20 auf 7561300 geführt hätte, dessen LN-Wert aber um 11 Einheiten kleiner als LN(7561291) ist – also ebenfalls eine nicht-akzeptable Differenz produziert.

Bei der zweiten Methode – über die Eigenschaften von SIN – hingegen geht man von bereits korrekt berechneten Werten aus (zunächst aus dem Bereich der Tabelle III, dann erweitert durch die jeweils aktuell berechneten Werte), und *sowohl* x *als auch* LN(x) werden nur mit *den* Rundungsfehlern bestimmt, die der jeweils gewählten Tafelgenauigkeit entsprechen. Es ist einmal mehr ein Beweis für Napiers Genialität, daß er seinen Vorschlag, $h = 10^8$ zu wählen, zugleich mit einer eindeutigen Präferenz für die wesentlich zuverlässigere zweite Methode verbindet. Verständlich ist, daß er sich (nach vermutlich 15-20 Jahren Arbeit an der Berechnung der Ur-Fassung seiner Logarithmen) *diese* Arbeit nicht ein weiteres Mal auflädt.

6. Epilog

Im Prinzip: Man muß unterscheiden zwischen Napiers *Methode* und ihrer *Umsetzung*; zu letzterer gehört u. a. auch die Numerik. Die Methode ist perfekt, wie man *en passant* gesehen hat: würden alle Rechnungen ohne Genauigkeitsbeschränkung durchgeführt, ist das Ergebnis nur von der Güte von LN(9999999) abhängig; da Napiers (Mittel-)Wert 1.00000005 sogar weniger als 10^{-14} vom wahren Wert abweicht (siehe nachfolgend), wiese selbst eine auf mehrere weitere Dezimalstellen berechnete LN(SIN)-Tafel noch keinerlei Fehler auf. Eine derartige Umsetzung ist also überflüssig, und nimmt zusätzlich einen Nachteil in Kauf: sie geht nicht auf Napiers explizite oder (meist) implizite numerische Ideen ein und verstellt damit den Blick auf seine brillianten Genauigkeitsüberlegungen.

Im Detail: Es macht also keinen besonderen Sinn, Napiers Rechenweg beizubehalten, dafür aber die Rechnung auf 15 Dezimalstellen auszudehnen (wie E. Sang 1865), oder gar auf 27 (wie W. R. Macdonald, vgl. Napier 1889). Napier hingegen berechnet aber nicht ohne Absicht und Überlegung schon die Eingänge v_k der Tabelle I a) nur genähert, und das b) auf 7 Dezimalen, die Einträge z_l der Tabelle II ebenso, jedoch nurmehr auf 6 Dezimalen, die 1. Spalte $x_{0,n}$ der Tabelle III auf 5 Dezimalen, und daraus die restlichen Spalten auf nurmehr 4, während er die Logarithmen bzw. ihre Schranken auf 7 (manchmal, wie gesehen, sogar 8) Dezimalen berechnet – um am Ende auf *eine* Dezimalstelle herunterzugehen, und ganz am Schluß gar diese eine noch wegzurunden. Die Gründe dafür sind nach dem Vorangegangenen hoffentlich transparenter geworden.

Balance zwischen Aufwand und Genauigkeit. Natürlich ist dieses Vorgehen Ausdruck einer Napierschen *Meta*-Methode, nämlich das Gleichgewicht zwischen vertretbarem Rechenaufwand und vorgegebener Genauigkeit der angestrebten LN(SIN(α))-Tabelle möglichst perfekt auszutarieren. Die Umsetzung in höherer Genauigkeit ist daher nicht nur unnötig, anachronistisch oder verstellt zumindest den Blick für die wichtigen Vor-Überlegungen Napiers (auch und gerade dann, wenn sie nicht offen dargelegt sind), sondern sie führt auch zu in der Mathematik eher selten vorkommenden Kuriositäten, wie etwa einen seinerseits fehlerhaft korrigierten Fehler. Hier das Beispiel:

Ein fehlerhaft korrigierter Fehler. Napier teilt keine seiner Tabellen *in toto* mit, sondern nur ein paar Werte des Anfangs sowie den jeweils letzten Wert. Dahinter steht natürlich die Aufforderung, die unterdrückten Schritte nachzuvollziehen. Tabelle I z. B. kann man nahezu berechnen, wie man will – immer wird man 9999900.0004950 als v_{100} erhalten. Anders ist es mit Tabelle II; Napier gibt bekanntlich den Wert

$$z_{50(\text{Napier})} = 9995001.22\mathbf{2927}$$

an (fehlerhafte Ziffern wie stets durch Fettdruck herausgehoben). Berechnet man $0.99999^{50}10^7$ mit höherer Genauigkeit, so erhält man

$$z_{50(\text{Sang/Macdonald})} = 9995001.2248\mathbf{04}.$$

Also wird spätestens seit Macdonald (vgl. Napier 1889; aber vermutlich schon Sang folgend, der diesen Fehler bei *seiner* Nachberechnung im Jahr 1865 natürlich aufspürte) als Korrektur $z_{50} = 9995001.2248\mathbf{04}$ angesetzt. Dieser Wert ist – man wird es vermuten – seither nicht mehr hinterfragt worden; immerhin hat Macdonald ihn auf beeindruckende 27 Dezimalstellen berechnet und immerhin 24 davon mitgeteilt. Daher steht diese numerische Korrektur z. B. bei Struik (1969, ^{2}1986) 14 ebenso wie bei Ayoub (1993) 359-360, um nur zwei zu erwähnen. Doch dieser Wert ist – in den letzten beiden Stellen bereits kenntlich gemacht – *falsch*: *denn Napier berechnet ja überhaupt nicht* $0.99999^{50}10^7$ auf 6 Dezimalen, sondern vielmehr das Glied z_{50} der durch

$$z_0 = 10000000.000000$$
$$z_{l+1} = z_l - z_l/100000$$

gegebenen *rekursiven Folge unter Beachtung seiner Rundungsregeln*. Jeder Numeriker sieht sofort, daß dabei in Abhängigkeit von der verwendeten Stellenzahl in aller Regel ein anderes Ergebnis herauskommen wird – Ausdruck der Erkenntnis, daß algebraisch äquivalente Ausdrücke dies numerisch oft nicht sind. Befolgt man hingegen die *Rechenanweisung Napiers* genau – und nur das ist für die Überprüfung seiner Ergebnisse zulässig –, so wird z_{50} zu 9995001.224826. *Dieser* Wert taucht in der Literatur zum Thema Napier jedoch nie auf, sondern allenfalls der anachronistisch ermittelte und daher falsche Korektur-Wert Macdonalds bzw. Sangs.

Nochmals: Fehlerfortpflanzung und Genauigkeit. Die Größenordnung des tatsächlich hier von Napier gemachten Fehlers bleibt jedoch auch nach dieser Richtigstellung leider gleich, und da ausgerechnet z_{50} bei der Berechnung von LN(9995000) und daran anknüpfend von LN(9900000) *die* zentrale Rolle spielt, sind Napiers Tafeln in der letzten Stelle unsicher (im Berechnungsintervall; im gesamten Tafelbereich – und dort insbesondere bei den "nahe" bei 0 liegenden Argumenten – als Konsequenz aus seiner Berechnungsmethode 1 natürlich noch mehr Stellen). Doch das ist eben nicht der entscheidende Punkt, auf den es ankommt. Vielmehr ist dieser Punkt deswegen besonders betont worden, weil z. B. auch die auf 4 Dezimalstellen von Napier angegebenen Eingangs-Werte der zentralen Tabelle III immer dann von einer Nachrechnung abweichen werden, sobald man sie nur flüchtig oder ahistorisch vornimmt; auch dies nur als warnendes Beispiel:

Natürlich ist es heute verlockend, etwa $x_{68,0}$ einfach und *direkt* durch Auswertung von $10^7 0.99^{68} 0.9995^0$ auszurechnen; aber man wird einfach nicht Napiers Wert von

5048858.8900 erhalten (wohl aber erstaunlicherweise mit einem handelsüblichen Taschenrechner, was hier der Kuriosität halber erwähnt werden soll. Das liegt daran, daß hier die beiden letzten Stellen der Zahl echte Nullen sind, und der Taschenrechner gerade noch die ersten 9 Ziffern anzeigen kann...). Und doch ist dies der korrekte Zahlenwert, der eben nur durch die *rekursive* Berechnung *bei gleichzeitiger Beachtung* der Anweisung Napiers für das Bilden des 100sten Teils einer Zahl erhalten werden kann.

Die Genauigkeitsüberlegungen für die Eingänge der Tabellen I-III lassen sich leicht zusammenfassen und wurden vorne schon gestreift: wird eine ganze Zahl mit einer Zahl mit k Stellen hinter dem Dezimalpunkt multipliziert, so müssen mindestens k Dezimalstellen – besser noch k + 1 – mitgeführt (bzw. beim Startwert, sofern er sie nicht schon besitzt, angehängt) werden. So kommen die Einträge in Tabelle I ausgehend von 10^7 durch Multiplikation mit 0.9999999 – genauer: durch Subtraktion des 10^7ten Teils – zustande. Hier ist k = 7; *deshalb* wird die Rechnung auf 7 Dezimalen ausgeführt, und *deshalb* müssen an h = 10000000 noch 7 Dezimalen angehängt werden: $h = v_0 =$ 10000000.0000000. In Tabelle II wird mit 0.99999 multipliziert, bzw. der 10^5te Teil subtrahiert; hier ist k = 5, Napier benutzt aber trotzdem (sicherheitshalber?) 6 Dezimalstellen. In Tabelle III ist der Multiplikator in einer *Spalte* 0.9995 (also k = 4); hier sieht man noch deutlicher als im vorigen Fall, daß Napier sicherheitshalber *zunächst* eine Stelle mehr mitführt und die *erste* Spalte mit 5 Stellen berechnet, da sie als Ausgangsmaterial für die weiteren Spalten fungiert. Bevor aber die Multiplikation mit 0.99 auf diese Spalte angewendet wird, reduziert er die Genauigkeit auf die mindestens erforderlichen 4 Stellen, um unnötigen Aufwand zu vermeiden.

Ähnliches gilt für die Berechnung der LN-Werte. Bei $h = 10^7$ wird ein Fehler in $LN(v_1) = LN(9999999)$ bis $LN(x_{68,20}) \approx LN(5000000)$ nahezu versiebenmillionenfacht – allgemein um $-h \cdot \ln(0.5) \approx 0.7h$. Da Napier LN-Werte mit einem absoluten Fehler < 1 anstrebt, und $0.7 \cdot 10^7 \approx 10^7$ ist, ergibt sich hierdurch zwangsläufig die Begrenzung des Anfangsfehlers auf $\approx 10^{-7} = 1/h$. Die gleiche Überlegung gilt auch für den Fall, daß – gemäß Napiers zweitem Vorschlag, der ja prinzipiell auch auf $h = 10^7$ anwendbar gewesen wäre – nur die LN-Werte bis $\mathrm{SIN}(45^0) = \frac{\sqrt{2}}{2}h$ mit einem absoluten Fehler < 1 ermittelt werden sollen. Der Anfangsfehler wird hier etwa 0.35h-fach vergrößert, so daß er $(0.35h)^{-1} \approx 3/h$ nicht überschreiten darf; ist er nur 1/h – um so besser. Im allgemeinen Fall erhält Napier die Grenzen für seinen ersten von 0 verschiedenen Logarithmus bei $x = v_1 = h - 1$, und es ist daher (für großes h, wie bei Napier üblich)

$$1 < LN(h-1) < \frac{h}{h-1} = 1 + \frac{1}{h-1} = 1 + \frac{1}{h} + \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^3} + \ldots \approx 1 + \frac{1}{h}.$$

Der größtmögliche hinzukommende Fehler im *nächsten* LN-Wert ist aber stets, und zwar wegen des potentiellen Fehlers durch Abschneiden bei der Berechnung des zugehörigen nächsten x-Werts(!), kleiner als dieses 1/h, und daher ist Napier immer auf der sicheren Seite. Macdonald hat nun – hier aber zu Recht – darauf hingewiesen, daß Napiers Startwert in Wirklichkeit noch bedeutend besser ist; denn letztlich schneidet Napier zwar nach 1/h ab – z. B. durch die Verwendung von 7 Dezimalen bei $h = 10^7$ für LN-Werte vor dem Eintrag in die Grundtabelle –, legt aber für diese LN-Werte selbst den *Mittelwert* zwischen den Schranken zugrunde. Mit anderen Worten: Napier wählt eigentlich

$$\mathrm{LN}(h-1) \approx 1 + \frac{1}{2h},$$

während tatsächlich (was er ja noch nicht wissen kann)

$$\mathrm{LN}(h-1) = h\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{2h^2} + \frac{1}{3h^3} + \frac{1}{4h^4} + \ldots\right) = 1 + \frac{1}{2h} + \frac{1}{3h^2} + \frac{1}{4h^3} + \ldots$$

ist. Der Anfangsfehler beträgt daher *höchstens* $0.5h^{-2}$; die Genauigkeit seines Anfangswertes LN(h – 1) verbessert sich also quadratisch mit wachsendem h.

Wenn also der Fehler in den berechneten LN-Werten (wie an zwei Stellen in Parenthese angemerkt) bei einem LN(9999999)-Ausgangsfehler von nur 10^{-14} bei LN(9995000) schon $2 \cdot 10^{-5}$ erreicht hat, bei LN(9900000) schon $5 \cdot 10^{-4}$, so ist das *nicht* auf die Fehler durch die Berechnungen von LN zurückzuführen, *sondern auf die genäherte Berechnung der Glieder der geometrischen Folgen*. Denn bei *deren* Berechnung macht Napier durch die Beschränkung auf 7, 6, 5 und 4 Dezimalstellen entsprechende Abschneidefehler. Da derartige Abweichungen in den Argumentwerten, wie man weiter oben gesehen hat, innerhalb der Startintervalls einen etwa gleich großen Fehler in den LN-Werten nach sich ziehen, kommt es zu solchen Fehlern, deren Größenordnung die des Startwertfehlers bei weitem überschreitet. Führte man jedoch alle Rechnungen nach Napierscher Anweisung korrekt aus, so bleiben – wie zu sehen war – selbst diese Fehler auch bei skeptischster Betrachtung (denn Vorwärtsanalyse tendiert ja bekanntlich dazu, den tatsächlichen Fehler zu überschätzen) stets noch innerhalb der angestrebten Tafelgenauigkeit.

Ausführung der Einzelberechnungen. Wie man gesehen hat, ist Napier bei der Bewältigung des immensen Zahlenmaterials mit äußerster Umsicht vorgegangen (und sicher auch mithilfe seiner Stäbchen, auf deren Rolle einzugehen hier nicht der Platz ist); um so bedauerlicher ist natürlich der Lapsus bei dem zentralen Wert z_{50}. Der dadurch eingeführte absolute Fehler von –0.0018999 bei LN(9995000) vergrößert sich auf ca. -2.624 bei $\mathrm{LN}(x_{68,20}) \approx \mathrm{LN}(5000000)$. Angesichts der nur unwesentlichen Fehler in den anderen Rechnungen der *Constructio* ist es nicht ohne Tragik, daß der einzige größere Fehler an einer Stelle geschah, die zu den Angelpunkten von Napiers LN-Berechnung gehört. Doch das tut der Gültigkeit seiner Methode keinen Abbruch; und die Vorstellung, daß ein Einzelner dieses enorme Zahlenmaterial nicht nur bewältigte, sondern vorher seine Schritte in einer bis dahin beispiellos gründlichen Analyse durchdachte und durchdrang – das verdient noch heute Würdigung und Respekt.

Literatur:

Ayoub, Raymond: What Is a Napierian Logarithm? – *American Mathematical Monthly* **100** (1993) 351-364 [April 1993]

Ayoub, Raymond: Napier and the Invention of Logarithms.– *Journal of the Oughtred Society*, **Vol. 3, No. 2** [September 1994] 7-13

Fischer, Joachim: Looking "behind" the Slide Rule: How did Napier compute his Logarithms? – *Proceedings of [the] Third International Meeting of Slide Rule Collectors, September 12, 1997*. Faber-Castell Castle, Stein/Nürnberg, 8-18

Glaisher, James Whitbread Lee: Stichworte LOGARITHM, NAPIER.– In: *The Encyclopædia Britannica*, New York: The Encyclopædia Britannica Company ^{11}1911

Knott, C. G. (ed.): Napier Tercentenary Memorial Volume.– London: Royal Society of Edinburgh 1915

Macdonald, William Rae: Stichwort NAPIER.– In: *The Oxford English Dictionary*, Oxford: Oxford University Press 1933

Napier, John: Mirifici logarithmorum canonis constructio [...].– Edinburgh: A. Hart 1619

Napier, John: Mirifici logarithmorum canonis constructio (qui et tabula artificialis ab authore deinceps appellatur) eorumque ad naturales ipsorum numeros habitudines.– Lyon: B. Vincent 1620

Napier, John: The Construction of the Wonderful Canon of Logarithms [übersetzt ins Englische von William Rae Macdonald]. – (Originalausgabe: 1889) Reprinted 1966 for Dawsons of Pall Mall, London S.W. 1

Naux, Charles: Histoire des logarithmes de Neper à Euler.– 2 Bände; Paris: Blanchard 1966 [Band I] /1971 [Band II]; insbesondere Band I, S. 34-91

Otnes, Robert K.: An Example of Napierian Logarithms.– *Journal of the Oughtred Society*, **Vol 4., No. 1** (März 1995) 46-47

Struik, Dirk J.: A Source Book in Mathematics, 1200-1800.– Princeton: Princeton University Press 1969 (als Paperback 1986); hier: Abschnitt I 4, S. 11-21 [basierend auf Napier 1889, s. d.]

Diese Fassung ist Roland Bulirsch zum 65. Geburtstag zugeeignet.

Berlin, den 10. November 1997