Die Beschreibung der Differenzenmaschine von Hamann und deren Anwendung aus der ungekürzten Einleitung zu

LOGARITHMISCH-TRIGONOMETRISCHE TAFELN

MIT ACHT DEZIMALSTELLEN

ENTHALTEND

DIE LOGARITHMEN ALLER ZAHLEN VON I BIS 200000 UND DIE LOGARITHMEN DER TRIGONOMETRISCHEN FUNKTIONEN FÜR JEDE SEXAGESIMALSEKUNDE DES QUADRANTEN

MIT UNTERSTÜTZUNG DER KGL. PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN IN BERLIN UND DER KAIS. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN IN WIEN (TREITLSTIFTUNG)

NEU BERECHNET UND HERAUSGEGEBEN VON

DR. J. BAUSCHINGER UND DR. J. PETERS
UNIVERSITÄTS-PROFESSOR UND DIREKTOR DER KAIS. STERNWARTE IN STRASSBURG
OBSERVATOR DES K. ASTRONOMISCHEN RECHEN-INSTITUTS IN BERLIN

ERSTER BAND

TAFEL DER ACHTSTELLIGEN LOGARITHMEN ALLER ZAHLEN VON I BIS 200000

STEREOTYPAUSGABE

LEIPZIG
VERLAG VON WILHELM ENGELMANN
1910

Bearbeitung und Übertragung in das Format PDF von Stephan Weiss, Jan. 2005

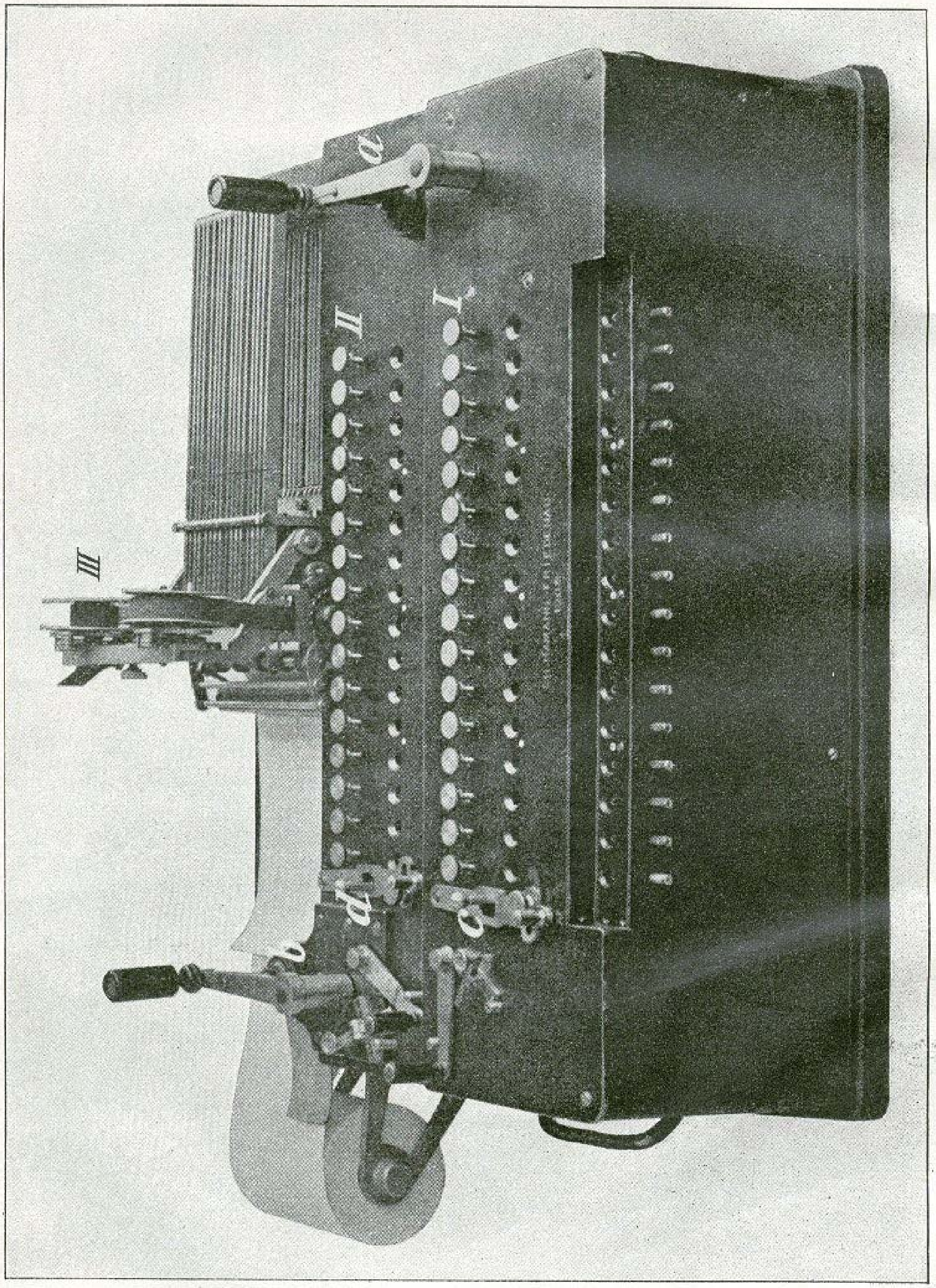


Fig. 1. Maßstab 1 : 4.

EINLEITUNG.

Das Bedürfnis nach achtstelligen Logarithmentafeln, das wir mit dem vorliegenden Werk zu befriedigen hoffen, trat zuerst in der Astronomie und Geodäsie hervor, indem die gebräuchlichen siebenstelligen Tafeln der ständig wachsenden Genauigkeit der Beobachtungen nicht mehr zu genügen vermochten. Aber auch in der Statistik, dem Versicherungswesen, der Technik, der Finanzwissenschaft u. a. mehrten sich die Fälle, wo die auszuführenden Rechnungen gebieterisch eine höhere Genauigkeit erforderten, als sie mit der siebenstelligen Tafel zu erreichen war. Der Ausweg, den man allenthalben zwar widerwillig, aber notgedrungen ergreifen mußte, war der, daß man zur zehnteiligen Rechnung mit Hilfe der einzig zur Verfügung stehenden Tafel, dem Thesaurus von Vega, überging, eine Maßregel, die über die geforderte Genauigkeit weit hinausging, also unökonomisch war, und überdies zu höchst lästigen Interpolationen mit zweiten Differenzen zwang, da das Intervall der genannten Tafel ein zu weites ist. Die erste wirkliche Abhilfe wurde durch die »Table de logarithmes de Service geographique de l'armée« (Paris 1891) geschaffen, die, auf durchaus selbständiger Rechnung beruhend, in einem schön gedruckten Bande das achtstellige Material in guter Anordnung und größter Korrektheit darbot. Der Wunsch, ein Monumentalwerk herzustellen, hat aber zu einem zu großen Druck und zu einem unhandlichen Format verführt, das wenigstens für den andauernden Gebrauch lästig ist; zudem ist an einigen Stellen das Intervall noch immer ein unerwünscht großes, und endlich ist die Dezimalteilung des Quadranten zugrunde gelegt, die den Gebrauch dieses Werkes für die Astronomie, zum Teil auch für die Geodäsie und für die andern rechnenden Wissenschaften, wenn auch nicht ausschließt, so doch umständlich macht.

Bei dieser Sachlage faßten wir im Jahre 1904 den Plan, eine neue achtstellige Tafel herzustellen, die nicht nur der gelegentlichen Benutzung, sondern dem ständigen Handgebrauch dienen sollte, also an Bequemlichkeit nicht erheblich hinter den siebenstelligen Tafeln zurückstehen durfte, und dabei die Sexagesimalteilung des Quadranten zur Grundlage hatte. Durch Besprechungen mit hervorragenden Kennern der Rechenkunst, insbesondere Herrn Professor H. Bruns in Leipzig, wurden wir in unserem Vorhaben bestärkt, und der Plan bekam feste Gestalt in einer Denkschrift, die der Versammlung der Astronomischen Gesellschaft in Lund vorgelegt wurde[1]. Die Art der Berechnung wurde darin festgestellt und die Kosten derselben veranschlagt; erstere wird unten näher auseinanderzusetzen sein, letztere wurden einschließlich der notwendigen Rechenmaschine auf 22 000 Mark berechnet, welcher Betrag sich nachträglich als überraschend richtig erwiesen hat. Die Astronomische Gesellschaft billigte den Plan, versprach ihre moralische Unterstützung und stellte, wenn erforderlich, finanzielle Beihilfe in Aussicht.

Die nächsten Jahre 1905—1907 verliefen über den Anstrengungen, die Mittel für die Berechnung zu erlangen. Die Kgl. Preußische Akademie der Wissenschaften in Berlin stellte zwar auf Antrag von Herrn Prof. Auwers schon im Jahre 1905 den Betrag von 15000 Mark zur Verfügung und hat damit dem Unternehmen nicht nur die finanzielle Basis, sondern auch das Gewicht ihrer wissenschaftlichen Autorität verliehen, die Restsumme aber war erst anfangs 1908 gesichert, als die Kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien aus dem Treitlschen Legat auf Antrag von Herrn Professor E. Weiß den Betrag von 8000 Kronen be-

---

1 Astronomische Vierteljahrsschrift Band 39. 1904.

willigte. Mit der Gesamtsumme von rund 21800 Mark hofften wir die Rechnungen und die Herstellung des Manuskripts bewältigen zu können und nahmen daher im Frühjahr 1908 die Arbeit in Angriff. Das erste Jahr war ausschließlich den mit der Hand auszuführenden, den Interpolationsprozeß vorbereitenden Rechnungen gewidmet, wie weiter unten noch näher auszuführen sein wird. Mit drei bis vier Rechnern und unter unserer ständigen Kontrolle war die Arbeit im Mai 1909 vollendet. Gleichzeitig mit dem Beginn der Handrechnungen traten wir mit dem Konstrukteur von Rechenmaschinen, Herrn Ingenieur Hamann in Berlin-Friedenau in Verbindung und baten ihn, seine bewährte Kraft der Konstruktion einer neuen Differenzenmaschine zu widmen, durch welche der Funktionswert durch Aufsummation aus den zweiten Differenzen berechnet und gleichzeitig aufgeschrieben wird. Herr Hamann ging mit einer Bereitwilligkeit, die uns zu großem Dank verpflichtet, auf diese Idee ein und lieferte Anfang 1909 eine Maschine, die unseren Erwartungen vollkommen entsprochen hat. Eine kurze Beschreibung wird unten folgen. Die Arbeit mit dieser Maschine, die wir für alle ähnlichen Rechnungen auf das wärmste empfehlen können, wurde sofort aufgenommen und mit zwei Rechnern so gefördert, daß nach einem Jahr die ganze enorme Interpolation, bestehend aus 828000 Einzelwerten (hierbei ist eine zweite Rechnung von log sin und log cos außer Betracht geblieben) vollendet war. Fast gleichlaufend mit der Maschinenarbeit wurde die Kontrolle und die Herstellung des für den Setzer bestimmten, auf acht Dezimalen abgekürzten Manuskriptes ausgeführt.

Als die Leistungsfähigkeit der Maschine gesichert erschien, trugen wir kein Bedenken, sofort mit dem Druck des Werkes zu beginnen, damit durch diesen, der auf zwei Jahre zu veranschlagen war, die Herausgabe nicht verzögert würde. Die Firma Wilhelm Engelmann in Leipzig fand sich bereit, den Verlag und die Druckkosten zu übernehmen, und ist auf alle unsere sehr weitgehenden Wünsche betreffs der Ausstattung und der Druckausführung eingegangen. Nicht nur wir sind ihr hierfür zu Dank verpflichtet, sondern wir hoffen, daß alle Benutzer des Werkes ihr für die Opfer, die sie im Interesse des bequemen Gebrauches und der Korrektheit des Druckes gebracht hat, Anerkennung zollen werden. Der Druck begann nach längeren Vorbereitungen und Probedrucken im Mai 1909 und war für den ersten Band im November 1909 beendet; der zweite Band ist im wesentlichen im Jahre 1910 vollendet worden.

2. Es war von Anfang an nicht unsere Absicht und hätte mit den vorhandenen Mitteln auch nicht bewältigt werden können, eine völlig unabhängige Neurechnung aller hier gebotenen Funktionswerte auszuführen; hierzu lag ein zwingender Anlaß auch nicht vor, da in den unten aufgeführten Quellenwerken der ersten Berechner von Logarithmentafeln für alle Zeiten ein bis auf mindestens zwölf Dezimalstellen sicheres Fundament vorliegt. Wohl aber stellten wir uns zur Aufgabe, die auszuführenden Rechnungen so anzulegen, daß die achte Dezimale völlig gesichert werde, und daß alle Funktionswerte in solchen Intervallen geboten werden, daß nicht nur Interpolationen mit zweiten Differenzen ganz überflüssig sind, sondern daß auch unbequeme Interpolationen mit ersten Differenzen, d. h. solche mit vierziffrigen Differenzen, erheblich in der Minderzahl bleiben. Hierzu war notwendig, wie hier nicht weiter auseinandergesetzt zu werden braucht, die Logarithmen aller Zahlen von 1—200000 und die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen von Sekunde zu Sekunde zu geben, und für die ersten Grade des Quadranten die bekannten Hilfsgrößen S und T in angemessener Ausführlichkeit hinzuzufügen.

Aus den genannten Forderungen ergab sich sogleich, daß der zehnstellige Vegasche Thesaurus (Leipzig 1794) bzw. die zehnstelligen Vlacqschen Tafeln[2], von denen er ein Abdruck

2 Vlacq, Arithmetica logarithmica Goudae 1628 (gibt zehnstellig die Logarithmen der Zahlen von 1—100 000),

ist, für unseren Zweck nicht brauchbar waren, sondern daß wir auf die englischen Quellenwerke zurückgehen mußten, nämlich auf

1) Briggs, Arithmetica logarithmica, Londini 1624,

2) Briggs-Gellibrand, Trigonometria britannica, Goudae 1633.

Das erstere gibt 14stellig die Logarithmen der Zahlen von 1—20000 und von 90000—100000, das letztere neben anderem 14stellig die log sin von 36" zu 36" (Hundertel Grade). Es ist längst bekannt und wird auch durch Bildung der Differenzen sofort erhärtet, daß darin die 14. Dezimale überhaupt keine Realität besitzt, also in den Tafeln hätte unterdrückt werden müssen. Wir haben daher als Grundlage unserer Rechnungen die Briggs-Gellibrandschen Werte, auf zwölf Dezimalen abgekürzt, angenommen und dabei die Unsicherheit der zwölften Dezimale auf höchstens ± 0.6 Einheiten veranschlagen dürfen. Die zahlreichen direkten, mit 20 Dezimalen ausgeführten Rechnungen, die zur vollen Sicherung der achten Dezimale vorgenommen werden mußten, haben diese Voraussetzung in allen Fällen bestätigt, so daß wir niemals Anlaß hatten, an der Sicherheit unseres Fundamentes zu zweifeln.

Die Ausführung des obigen Programmes erforderte folgende Interpolationsarbeiten:

A. Zahlen. Die Logarithmen von 10000—20000 mußten auf ein zehnmal kleineres Intervall gebracht werden und gaben dann die Logarithmen von 100000—200000; die Logarithmen von 2000—10000 mußten auf ein zehnmal kleineres Intervall gebracht werden und gaben dann die Logarithmen von 20000 —100000. Die Logarithmen von 90000—100000 lagen in der »Arithmetica logarithmica« zwar bereits vor, sind aber der Gleichförmigkeit halber nochmals berechnet worden. Die oben zitierte »Table de Service geographique de l'armée« hätte uns desgleichen die Werte für 100000 —120000 und von 10000—100000 bereits achtstellig dargeboten, wir haben es aber doch vorgezogen, die Rechnung auch hierfür nochmals auszuführen, weil wir die Richtigkeit aller von uns im vorliegenden Werke gegebenen Logarithmen durch eigene Berechnung garantieren wollten, und weil wir eine vollständige Tafel mit zwölf Dezimalen in dem gewählten Intervall wenigstens im Manuskript zu besitzen wünschten. Die französische Tafel wurde beim Lesen der Korrekturen als Kontrolle benutzt; dabei wurde nur ein Fehler in ihr aufgefunden, indem bei log 28917 zu lesen ist: 461 15323 statt 461 15324.

Der Interpolationsprozeß wurde mit Rücksicht auf die Aufdeckung von eventuellen Fehlern in den Briggs-Gellibrandschen Werten in folgender Weise vollzogen. Zunächst wurden durch Handrechnung die Differenzen bis zur vierten Ordnung: $(a+\frac{1}{2},1),(a,2),(a+\frac{1}{2},3),(a,4)$ [3] des weiten Intervalles auf zwölf Stellen gebildet. Wollte man nun bei der Summation durch die Maschine nur die beiden ersten Differenzreihen berücksichtigen und den Einfluß der dritten und höheren Differenzen, deren Vernachlässigung den interpolierten Wert höchstens um knapp eine Einheit der zwölften Dezimale hätte verfälschen können, erst nachträglich in Rechnung stellen, so eignete sich zur Interpolation am besten die Formel von Bessel. Die Anfangs- und Endglieder der ersten Differenzreihe im engeren Intervalle haben hier die Werte:

$$(a+\tfrac{1}{20},1) = 0.1(a+\tfrac{1}{2},1) - 0.045(a+\tfrac{1}{2},2)$$

$$(a+\tfrac{19}{20},1) = 0.1(a+\tfrac{1}{2},1) + 0.045(a+\tfrac{1}{2},2);$$

die zweite Differenz

$$(a+\tfrac{1}{10},2) \quad \text{bis} \quad (a+\tfrac{9}{10},2) = 0.01(a+\tfrac{1}{2},2)$$

Vlacq, Trigonometria artificialis Goudae 1633 (gibt zehnstellig die log sin, cos, tang, cotg von 10" zu 10").

3 Wir schließen uns hier und im folgenden an die Bezeichnungsweise von Bruns in seinem Werk »Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens« an.

ist für ein ganzes Intervall konstant. Es blieb also der vorbereitenden Handrechnung allein vorbehalten, den Anfangswert $(a+\frac{1}{20},1)$ der ersten Differenzreihe, sowie die zweite Differenz für jedes Intervall zu bestimmen. Durch Summation mit der Maschine ergaben sich dann die interpolierten Logarithmen mit Berücksichtigung der beiden ersten Differenzen. Um Abrundungsfehler zu vermeiden, setzten wir vier weitere Dezimalen zu, wodurch als Kontrolle für die Summation erzielt wurde, daß der Schlußwert jedes einzelnen Intervalls bis einschließlich der sechzehnten Dezimale genau mit dem Anfangswerte des folgenden Intervalls übereinstimmen mußte.

Wenn auch die Kenntnis der Endwerte $(a+\frac{19}{20},1)$ der ersten Differenzreihe für die Interpolation nicht unbedingt erforderlich war, so sind diese Werte doch gleichzeitig mit den Anfangswerten der gleichen Differenzreihe für jedes Intervall gerechnet worden, um dadurch schon vor der Summation eine gute Kontrolle für die Richtigkeit der vorbereitenden Rechnungen zu gewinnen. Bildet man nämlich die Differenz zwischen dem Anfangswert der ersten Differenzreihe in einem Intervall und dem Endwert der gleichen Differenzreihe im nächstvorhergehenden Intervall, so ergibt sich als durchgreifende und dabei leicht zu berechnende Kontrollformel:

$$(a+\tfrac{1}{20},1)-(a-\tfrac{1}{20},1)=0.01(a,2)-0.0225(a,4).$$

Der Einfluß der dritten Differenzen auf den Funktionswert ist bei der Besselschen Formel

$$\frac{(t-\frac{1}{2})t(t-1)}{2\cdot 3}(a+\tfrac{1}{2},3)$$

er ist in den Fällen, in denen er die achte Dezimale beeinflussen konnte, scharf berechnet und berücksichtigt worden. Diesen Zweck erleichterte folgende Tafel.

t = Phase	Koeffizient der dritten Differenz	Maximalfehler
0.0	0.000	± 0.600
0.1	+ 0.006	± 0.654
0.2	+ 0.008	± 0.696
0.3	+ 0.007	± 0.726
0.4	+ 0.004	± 0.744
0.5	0.000	± 0.750
0.6	— 0.004	± 0.744
0.7	— 0.007	± 0.726
0.8	— 0.008	± 0.696
0.9	— 0.006	± 0.654
1.0	0.000	± 0.600

Der in diese Tafel mit aufgenommene Maximalfehler ist in Einheiten der zwölften Dezimale angesetzt und unter der Annahme berechnet, daß die Ausgangswerte nicht mehr wie ± 0.6 Einheiten der zwölften Dezimale fehlerhaft sein können.

Alle Logarithmen, deren Abkürzung auf die achte Dezimale nach Berücksichtigung des

Einflusses der dritten Differenzen wegen des an der betreffenden Stelle möglichen Maximalfehlers zweifelhaft blieb, sind durch Berechnung der Reihe:

$$\log(x+h) = \log x + 2M\left\{\frac{h}{2x+h} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2x+h}\right)^3 + \ldots\right\}$$

gesichert worden. In keinem dieser Fälle hat sich eine Abweichung des unabhängig von dem ganzen sonstigen Material gerechneten Wertes von dem Maschinenwerte ergeben, größer, als der vorher theoretisch festgelegte, noch zulässige Maximalfehler: ein Beweis, daß das Fundament, auf welches wir die Logarithmen der Zahlen aufgebaut haben, wenigstens an den Stellen, für die Neurechnungen vorliegen, durchaus korrekt ist, und unsere Annahme, die Ausgangswerte seien höchstens um ± 0.6 Einheiten der zwölften Dezimale fehlerhaft, berechtigt war. Daß wir aus diesem Umstände und der vorangegangenen Kontrolle durch vierte Differenzen auf die Richtigkeit (innerhalb der angenommenen Genauigkeit) sämtlicher Ausgangswerte geschlossen haben, dürfte wohl keinen Bedenken begegnen.

B. Die trigonometrischen Funktionen. Da für log sin und log tang der ersten fünf Grade ein ähnlicher Interpolationsprozeß wie der bei den Zahlenlogarithmen verwendete direkt sich nicht anwenden ließ, so wurde folgendes Verfahren eingeschlagen. Mit Hilfe der den Briggs-Gellibrandschen Tafeln entnommenen vierzehnstelligen Werte von log sin, log cos und den Zahlenlogarithmen wurden die bekannten Hilfsgrößen S und T aus:

$$S = \log\sin - \log\mathrm{arc}$$
$$T = S - \log\cos$$

von 36" zu 36" zwölfstellig berechnet, mittels der Maschine in der bei der Berechnung der Logarithmen der trigonometrischen Funktionen von 5° bis 45° beschriebenen Weise von 1" zu 1" interpoliert und dann durch Handrechnung für jeden einzelnen Sekundenwert der Logarithmus des Bogens in Sekunden hinzugefügt.

Die so gewonnenen zwölfstelligen log sin und log tang verwendeten wir zur Bestimmung des log cos der einzelnen Sekunde nach der Gleichung:

$$\log\cos = \log\sin - \log\mathrm{tang}$$

und hatten in der Übereinstimmung dieser Werte mit den von Bruhns[4] seinerzeit gerechneten vierzehn-stelligen Werten der gleichen Logarithmen, die uns durch gütige Vermittlung von Herrn Prof. E. Becker handschriftlich zur Verfügung standen, eine scharfe Kontrolle für die Richtigkeit der ganzen Rechnung sowohl wie des hier benutzten Ausgangsmaterials. Die Logarithmen der Kotangente ließen wir nur in das Druckmanuskript als dekadische Ergänzung zu log tang achtstellig eintragen.

In dem Bereiche 5° bis 45° sind die Logarithmen von sin, cos und tang für jede 36. Bogensekunde zwölfstellig dem Briggs-Gellibrandschen Werke entnommen worden, log sin und log cos direkt, log tang vermittels der kleinen (vierzehnstelligen) Rechnung

$$\log\mathrm{tang} = \log\sin - \log\cos .$$

Alle diese Werte wurden vor der weiteren Verarbeitung einer eingehenden Kontrolle durch Differenzen bis zur vierten Ordnung einschließlich unterzogen. Dabei stellte sich heraus, daß die Genauigkeit dieser Werte als gleich der im Zahlenteile zu veranschlagen ist, nämlich ± 0.6 Einheiten der zwölften Dezimale. Zum Zwecke der Interpolation durch Aufsummieren mittels der Maschine mußten nun die Differenzen des Einsekundenintervalles aus den Differenzen des gröberen 36" Intervalles berechnet werden. Es geschah dies nach den Formeln[5]:

4 Bruhns, Neues Logarithmisch-Trigonometrisches Handbuch auf sieben Dezimalen, pag. IX.

5 Siehe Enzyklopädie der math. Wissenschaften Band I, 2, pag. 814.

$$(a+\tfrac{1}{72},1)=\tfrac{1}{36}(a+\tfrac{1}{2},1)-\frac{35}{2\cdot 36^2}(a+\tfrac{1}{2},2)$$

$$(a+\tfrac{1}{36},2) \quad \text{bis} \quad (a+\tfrac{35}{36},2)=\frac{1}{36^2}(a+\tfrac{1}{2},2)$$

Bei dieser Rechnung wurden auch wie früher vier weitere Dezimalen zugesetzt. Zwar konnten dadurch Abrundungsfehler nicht gänzlich vermieden werden, doch wurde damit, wie weiter unten gezeigt werden wird, erreicht, daß die verbleibenden Abrundungsfehler trotz ihrer Häufung bei dem Summationsverfahren keinen größeren Einfluß auf die zwölfte Dezimale gewinnen konnten. Gleichzeitig bestimmten wir den Endwert der ersten Differenzenreihe in jedem Intervall nach der Formel:

$$(a+\tfrac{71}{72},1)=\tfrac{1}{36}(a+\tfrac{1}{2},1)+\frac{35}{2\cdot 36^2}(a+\tfrac{1}{2},2),$$

um so zu einer guten Kontrolle für diesen Teil der Rechnung zu gelangen:

$$(a+\tfrac{1}{72},1)-(a-\tfrac{1}{72},1)=\frac{1}{36^2}(a,2)-\frac{35}{4\cdot 36^2}(a,4).$$

Die weitere Arbeit übernahm dann wieder die Maschine. Wenn auch hier infolge der unvermeidlichen Abrundungsfehler der letzte durch die Maschine gewonnene Wert des einzelnen Intervalls nicht genau mit dem Anfangswert des folgenden Intervalls übereinstimmen konnte, so war doch bei der vorbereitenden Handrechnung durch Bestimmung des jedesmaligen Abrundungsfehlers schon Sorge getragen worden, daß in der Übereinstimmung dieses theoretisch abgeleiteten Fehlers mit dem bei der Summation tatsächlich sich ergebenden Fehler die nötige Kontrolle für die Richtigkeit der Summation, überhaupt des ganzen Interpolationsgeschäftes, erlangt wurde.

Die Kotangenten von 1" zu 1" sind unabhängig von den Tangenten, allerdings mit den für diese berechneten Differenzen des Einsekundenintervalls, ebenfalls durch die Maschine aufsummiert worden, teils der Kontrolle halber, teils, weil die Maschine die Rechnung schneller und sicherer lieferte, als mit der Hand die Verwandlung der Tangenten in die Kotangenten möglich gewesen wäre, und schließlich, weil wir ein vollständiges Maschinenmanuskript der zwölfstelligen Werte aller vier Funktionen erhalten wollten. Auch für 5° bis 45° wurde das Druckmanuskript für die Kotangente als dekadische Ergänzung der achtstelligen Werte der Tangenten gewonnen.

Zur Berechnung des Einflusses der dritten Differenzen auf die zwölfte Dezimale dienten die in folgender Tafel mitgeteilten Werte der Koeffizienten $\frac{(t-\frac{1}{2})t(t-1)}{6}$ des dritten Gliedes

$$\frac{(t-\tfrac{1}{2})t(t-1)}{6}(a+\tfrac{1}{2},3).$$

t = Phase	Koeffizient der dritten Differenz	Maximalfehler	Summationsfehler	Gesamtfehler
0 : 36	0.00000	± 0.6000	0.0000	± 0.6000
1 : 36	+ 0.00213	0.6162	± 0.0097	0.6259
2 : 36	+ 0.00389	0.6315	0.0188	0.6503
3 : 36	+ 0.00530	0.6459	0.0274	0.6733
4 : 36	+ 0.00640	0.6593	0.0354	0.6947
5 : 36	+ 0.00720	0.6718	0.0429	0.7147
6 : 36	+ 0.00772	0.6834	0.0498	0.7332
7 : 36	+ 0.00798	0.6940	0.0562	0.7502
8 : 36	+ 0.00800	0.7037	0.0620	0.7657
9 : 36	+ 0.00781	0.7125	0.0673	0.7798
10 : 36	+ 0.00743	0.7204	0.0720	0.7924
11 : 36	+ 0.00688	0.7273	0.0762	0.8035
12 : 36	+ 0.00617	0.7333	0.0798	0.8131
13 : 36	+ 0.00534	0.7384	0.0829	0.8213
14 : 36	+ 0.00440	0.7426	0.0854	0.8280
15 : 36	+ 0.00338	0.7458	0.0874	0.8332
16 : 36	+ 0.00229	0.7481	0.0888	0.8369
17 : 36	+ 0.00115	0.7495	0.0897	0.8392
18 : 36	0.00000	0.7500	0.0900	0.8400
19 : 36	− 0.00115	0.7495	0.0898	0.8393
20 : 36	− 0.00229	0.7481	0.0890	0.8371
21 : 36	− 0.00338	0.7458	0.0877	0.8335
22 : 36	− 0.00440	0.7426	0.0858	0.8284
23 : 36	− 0.00534	0.7384	0.0834	0.8218
24 : 36	− 0.00617	0.7333	0.0804	0.8137
25 : 36	− 0.00688	0.7273	0.0769	0.8042
26 : 36	− 0.00743	0.7204	0.0728	0.7932
27 : 36	− 0.00781	0.7125	0.0682	0.7807
28 : 36	− 0.00800	0.7037	0.0630	0.7667
29 : 36	− 0.00798	0.6940	0.0573	0.7513
30 : 36	− 0.00772	0.6834	0.0510	0.7344
31 : 36	− 0.00720	0.6718	0.0442	0.7160
32 : 36	− 0.00640	0.6593	0.0368	0.6961
33 : 36	− 0.00530	0.6459	0.0289	0.6748
34 : 36	− 0.00389	0.6315	0.0204	0.6519
35 : 36	− 0.00213	0.6162	0.0114	0.6276
36 : 36	0.00000	± 0.6000	± 0.0018	± 0.6018

Die in diese Tafel mit aufgenommenen, als Maximalfehler, Summationsfehler und Gesamtfehler bezeichneten Größen sind in Einheiten der zwölften Dezimale angesetzt. Dabei bedeutet der Maximal-fehler dasselbe wie früher bei den Zahlenlogarithmen, also die Unsicherheit der interpolierten Werte infolge der angenommenen Ungenauigkeit der Ausgangswerte von ± 0.6 Einheiten der zwölften Dezimale. Da die Interpolation nicht abrundungsfehlerfrei durchgeführt werden konnte, so trat hierzu ein weiterer Fehler, hervorgerufen durch die Summation der um gewisse Beträge der 16. Dezimale fehlerhaften Werte der Anfangsdifferenzen erster und zweiter Ordnung im Einsekundenintervall. Der Gesamtfehler, gleich der Summe der beiden eben genannten, stellt nun die größtmögliche Unsicherheit der interpolierten Logarithmen für jede Phase der Interpolation dar.

Stellte sich nach Berücksichtigung der Einwirkung der dritten Differenzen auf die zwölfte Dezimale heraus, daß infolge der Unsicherheit der Werte um den betreffenden Gesamtfehler die Abkürzung auf die achte Dezimale zweifelhaft blieb, so wurden diese Werte von Grund aus neu gerechnet. Dabei erschien es am zweckmäßigsten, zunächst die numerischen Werte der trigonometrischen Funktionen nach den bekannten Reihen

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \ldots$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \ldots$$

zu ermitteln und hierzu in derselben Weise, wie bei den Logarithmen der Zahlen, die Logarithmen zu bestimmen. Zweifelhafte Logarithmen der Tangenten wurden durch

log tang = log sin — log cos

gesichert, nachdem zu den numerischen Werten von sinus und cosinus des betreffenden Winkels die beiden Logarithmen zwanzigstellig berechnet waren.

Diese Neurechnung der Logarithmen der trigonometrischen Funktionen sowohl wie der Zahlenlogarithmen wurde zweimal ganz unabhängig voneinander und nach verschiedenen Methoden durchgeführt: das erstemal von einem der Verfasser in der angeführten Weise; sodann aber rechnete Herr Dr. Witt, dem wir dafür zu großem Danke verpflichtet sind, in selbstlosester Weise alle Werte ein zweites Mal durch. Für die trigonometrischen Funktionen stand ihm hierzu eine selbstgerechnete Hilfstafel der 21steiligen Logarithmen von sinus und cosinus zur Verfügung, über die er Näheres bei der demnächst zu erwartenden Veröffentlichung berichten will. Die beiden Rechnungen erzielten stets mindestens in der 16. Dezimale vollständige Übereinstimmung.

Auch bei diesen Neurechnungen der Logarithmen der trigonometrischen Funktionen zeigten sich keine unerwarteten Abweichungen von den systematisch durch Maschinenrechnung gewonnenen Werten, so daß man zu dem gleichen Schlusse berechtigt ist, den wir aus der Übereinstimmung der Neurechnung der Zahlenlogarithmen mit den Maschinenergebnissen gezogen haben.

Das durch die Maschine direkt gelieferte Material stellt eine große zwölfstellige Tafel in einem Intervall dar, wie es bis jetzt noch nirgends vorliegt; die zwölfte Dezimale ist zwar wegen der Vernachlässigung der dritten Differenzen nicht durchweg gesichert, kann aber durch eine verhältnismäßig kleine Rechnung bis auf rund eine Einheit festgestellt werden. Wenn diese Tafel auch nicht gedruckt werden kann, so wird sie sich doch für viele Zwecke als überaus nützlich erweisen; wir haben daher für ihren wohlgeordneten Zustand, der ein sofortiges Auffinden des einzelnen Wertes gestattet, Sorge getragen und sie in Kapseln, die in einem großen Aktenschrank aufgestellt sind, dem Astronomischen Recheninstitut in Berlin zur ständigen Aufbewahrung übergeben.

3. Wir rücken hier eine kurze Beschreibung der verwendeten Rechenmaschine ein, soweit sie zum Verständnis des eingeschlagenen Rechnungsweges unerläßlich ist; sie ist uns freundlichst von Herrn Eckert, der nach den Angaben des Herrn Ingenieur Hamann die Maschine zusammengesetzt hat, zur Verfügung gestellt worden.

Die Maschine besteht aus zwei gleichartigen voneinander unabhängigen Rechenmaschinen I und II zu je 16 Stellen und dem Druckwerk III (siehe Fig. 1, Titelbild). Jede der beiden Maschinen besteht wiederum aus einem Schalt- und einem Zählwerk. Die Arbeitsweise ist folgende: Ein im Schaltwerk von I befindlicher Wert wird durch eine Drehung der Kurbel a zu dem im Zählwerk I und zugleich im Schaltwerk II befindlichen Wert hinzugelegt, und zwar entweder im positiven oder negativen Sinne, je nachdem die Maschine durch den Hebel c auf Addition oder Subtraktion geschaltet ist. Eine nunmehrige Drehung der zweiten Kurbel b legt den im Schaltwerk II stehenden Wert zu dem im Zählwerk II stehenden hinzu, ebenfalls wieder in positivem oder negativem Sinne, je nachdem der Hebel d auf Addition oder Subtraktion geschaltet ist. Durch die Drehung der Kurbel b wurde auch zugleich das zum Druckwerk gehörige Schaltwerk, entsprechend dem im Zählwerk von II stehenden Wert, eingestellt. Eine weitere Umdrehung der Kurbel a addiert bzw. subtrahiert wiederum den im Schaltwerk I stehenden Wert zu dem im Zählwerk I befindlichen, zugleich wird aber auch bei jeder Umdrehung der Kurbel a das Druckwerk betätigt, und zwar gelangt der jedesmal im Zählwerk II stehende Wert zum Abdruck.

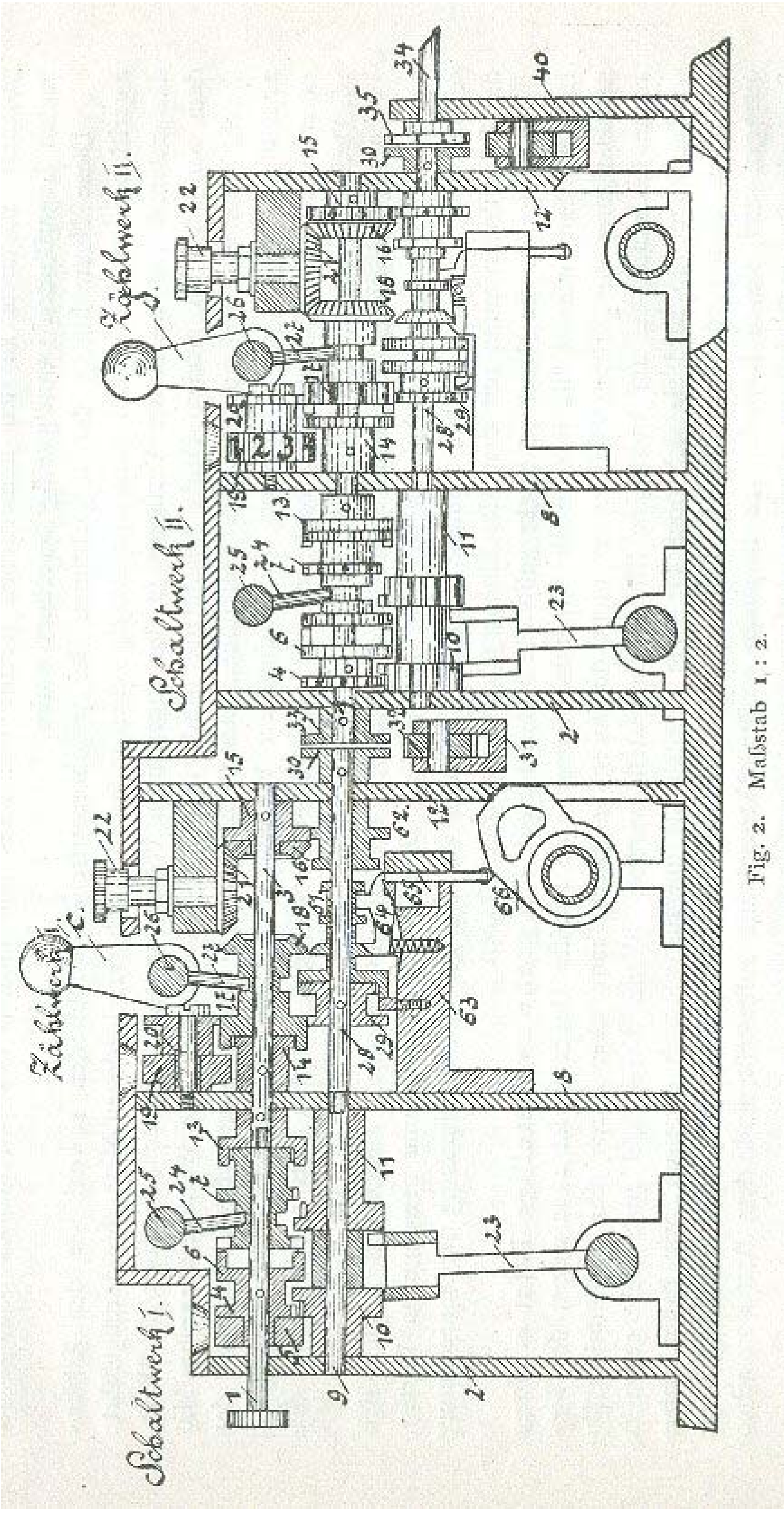
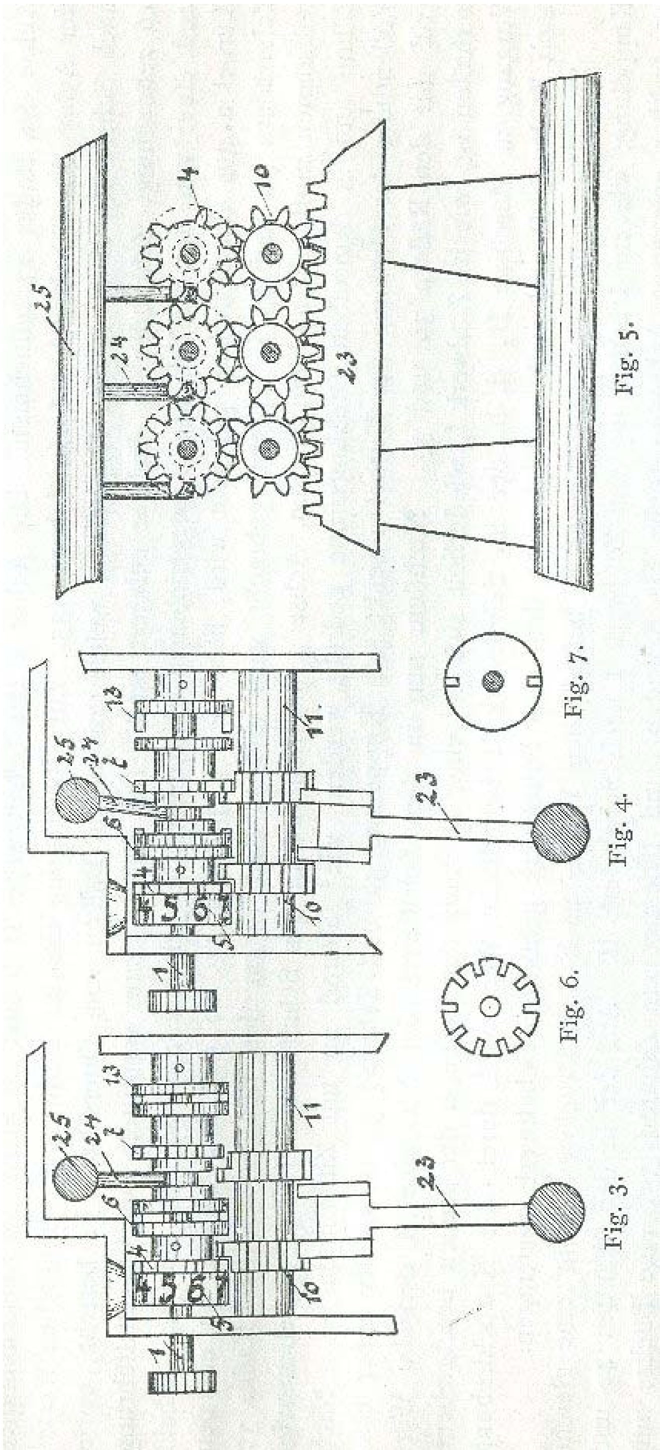


Fig. 2. Maßstab 1 : 2.

Zur Erklärung der Arbeitsweise der Maschine genügt die nähere Betrachtung einer Stelle derselben, da bei sämtlichen 16 Stellen der gleiche Vorgang stattfindet. Die Achse 1 (siehe Fig. 2) ist drehbar gelagert einesteils in der Wand 2, andernteils mittels eines angedrehten Zapfens in einem zentrischen Loch der Achse 3. Auf Achse 1 ist befestigt eine Büchse, welche ein zehnzähniges Zahnrad 4, eine von 0—9 bezifferte Trommel 5 und eine mit zwei Nasen versehene Flansche 6 (siehe Fig. 7) trägt. Drehbar auf der Achse 1 ist eine zweite Büchse, welche ein zehnzähniges Zahnrad 7 und an den beiden Endflächen Flanschen mit je zehn Einschnitten (siehe Fig. 6) trägt; in die links befindliche Flansche können die vorher erwähnten Nasen eingreifen. Auf der in den Wänden 2 und 8 festgelagerten Achse 9 sind zwei zehnzähnige Zahnräder 10 und 11 drehbar angeordnet, welche mit den Rädern 4 und 7 kämmen. Wie aus Fig. 2 ersichtlich, sind dieselben mehr wie doppelt so breit wie die Räder 4 und 7.Bei den letzteren ist je ein Zahn völlig entfernt, bei den Rädern 10 und 11 hingegen je ein solcher nur bis zur Hälfte der Radbreite (siehe Fig. 5). Bei Ruhelage der Kurbel a zeigen die Lücken der Zahnräder 10 und 11 nach oben, so daß sowohl Achse 1 mit Zahnrad 4, als auch Zahnrad 7 frei gedreht werden können. Steht im Schauloch der auf Achse 1 befestigten Ziffernrolle 5 eine Null, so zeigt die Lücke des Zahnrades 4 nach unten, so daß bei einer Drehung des Zahnrades 10 Rad 4 an derselben nicht teilnehmen kann. Wird dagegen die Achse 1 so eingestellt, daß im Schauloche der Ziffernrolle z. B. eine Sieben steht, so wird bei Drehung des Zahnrades 10 auch eine solche des Rades 4 erfolgen, und zwar so weit, bis die Lücke desselben nach unten zeigt, im Schauloch der Ziffernrolle also »Null« steht. Auf der in den Wänden 8 und 12 drehbar gelagerten Achse 3 ist befestigt ein Flansch mit zwei Nasen 13, welche in die rechts befindliche mit zehn Einschnitten versehene Flansche des Rades 7 eingreifen. Ferner sind auf dieser Achse befestigt ein Flansch mit zehn Einschnitten 14, ein zehnzähniges Rad 15 und ein zwanzigzähniges Kegelrad 16. Auf derselben Achse drehbar angeordnet ist eine Büchse mit einem zehnzähnigen Zahnrad 17, das ebenfalls zwei in die Einschnitte der Flansche 14 eingreifende Nasen hat, und einem zwanzigzähnigen Kegelrad 18. In Zahnrad 17 greift das mit der Ziffernrolle 19 verbundene Zahnrad 20 ein. Das Kegelrad 21 steht in stetigem Eingriff mit Kegelrad 16 und dient einesteils vermittels des Einstellknopfes 22 zum Einstellen der Ziffernrolle 19, andernteils noch, wie später erklärt wird, zum Erlangen einer umgekehrten Drehrichtung der Ziffernrolle 19.

Bei Ruhelage der Kurbel a ist Doppel-Zahnstange 23 im Eingriff mit Rad 10. Während der ersten Hälfte einer Umdrehung der Kurbel a legt die Zahnstange 23 vermittels eines mit Kurbelachse a verbundenen Kurbelzapfens und Pleuelstange einen so langen Weg zurück, daß Zahnrad 10 eine volle Umdrehung macht. Nach Vollendung der halben Kurbeldrehung kippt Zahnstange 23 vermittels einer mit der Kurbelachse a verbundenen Kurvenscheibe in Zahnrad 11 über, welches nun durch die während der zweiten Hälfte der Kurbeldrehung erfolgende Rückwärtsbewegung der Zahnstange 23 ebenfalls eine volle Umdrehung macht, natürlich nunmehr in entgegengesetzter Drehrichtung wie Rad 10.

In die Büchse des Rades 7 ist eine Nut eingedreht, in welche ein Haken 24 eingreift, welcher wiederum an einer Achse 25 befestigt ist. Bei einer drehenden Bewegung der Achse 25 wird durch Haken 24 die Büchse mit Rad 7 auf der Achse 1 verschoben werden. Die Achse 25 ist drehbar gelagert und erhält ihre Bewegungen ebenfalls durch eine mit der Kurbelachse a verbundene Kurvenscheibe.



Der Vorgang bei Addition ist nun folgender: Mit Hilfe des Einstellknopfes an Achse 1 sei die Ziffernrolle 5 so eingestellt, daß im Schauloch z. B. eine Sieben sichtbar ist. Sofort beim Andrehen der Kurbel a wird durch eine Drehung der Achse 25 Rad 7 so weit auf der Achse 1 verschoben, daß Achse 1 mit Achse 3 durch die Kuppelungen 4 und 13 verbunden ist (siehe Fig. 3) und dadurch Achse 3 an den Bewegungen der Achse 1 teilnehmen muß. Die Zahnstange 23 dreht nun durch Rad 10 Achse 1 so weit, bis im Schauloch der Ziffernrolle 5 Null erschienen ist. Nach Vollendung der ersten Hälfte der Drehung von Kurbel a, dreht sich Achse

25 noch weiter, bis Rad 7 von Flansche 13 entkuppelt ist. Nunmehr kippt Zahnstange 23 in Rad 11 über und dreht Rad 7 um ebensoviel Zähne vorwärts, wie dasselbe vorher zurückbewegt wurde. Da aber Rad 7 mit Rad 4 gekuppelt ist, wird nach Vollendung der Kurbeldrehung im Schauloch der Ziffernrolle 5 wieder derselbe Wert stehen, wie vorher. Bei Vollendung der Kurbelumdrehung gehen sowohl Achse 25 mit Rad 7, als auch Zahnstange 23 in die ursprüngliche Lage (siehe Fig. 2) zurück. Da nun Achse 3 wohl an der Rückwärtsbewegung der Achse 1, nicht aber an der vorwärtsgehenden teilgenommen hat, wird Ziffernrolle 19 um ebensoviel Einheiten vorwärts gedreht worden sein, wie der im Schauloch der Ziffernrolle 5 stehende Wert, in diesem Falle sieben, enthält.

Um mit der Maschine zu subtrahieren, ist es nötig, daß die zwischen Rad 17 und Flansche 14 bestehende Kuppelung aufgehoben, hingegen Kegelrad 18 mit Kegelrad 21 zum Eingriff gebracht wird (siehe Fig. 2, Zählwerk II). Dies geschieht auf folgende Weise. In die Büchse des Rades 17 ist eine Nut eingedreht, in welche ein an einer Achse 26 befestigter Haken 27 eingreift. Mit der Achse fest verbunden ist der Hebel c bzw. d. Bei einer Drehung dieses Hebels nach links werden die beiden Nasen des Rades 17 aus den Einschnitten der Flansche 14 austreten, zugleich wird aber auch Kegelrad 18 mit Kegelrad 21 zum Eingriff gebracht. Die Drehungen der Achse 3 werden nun nicht mehr direkt auf Rad 20 und Ziffernrolle 19 übertragen, sondern vermittels des Wendegetriebes 16, 21 und 18. Dadurch erhält Ziffernrolle 19 eine entgegengesetzte Drehung wie bei Addition, dieselbe wird sich also nicht mehr von o auf 1, 2, 3 usw. bewegen, sondern von 0 auf 9, 8, 7 usw.

Die in Fig. 2 mit 61—66 bezeichneten Teile gehören der Zehnerübertragung an, welche während der zweiten Hälfte der Umdrehung der Kurbel a stattfindet. Diese Zehnerübertragung ist die gleiche wie die bei der in neuester Zeit auch von Herrn Hamann konstruierten automatischen Divisionsmaschine »Mercedes-Euklid« verwendete und ist hierfür beschrieben in der Patentschrift Nr. 209817, auf die wir hiermit betreffs der Einzelheiten verweisen.

Um den auf Zählwerk I übertragenen Wert gleichzeitig nach Schaltwerk II zu bringen, kämmt Rad 17 mit einem auf Achse 28, welche in den Wänden 8 und 12 drehbar gelagert ist, befestigtem Zahnrad 29. Auf dieser Achse ist ferner befestigt ein Zahnrad 30. Die Achse 28 muß also an den Drehungen der Achse des Rades 17 teilnehmen. Die Achse 1 des Schaltwerkes II besitzt an Stelle des Einstellknopfes der Achse des Schaltwerkes I ein Zahnrad 33. Zur Übertragung des im Zählwerk I befindlichen Wertes nach Schaltwerk II dient eine Kuppelung, welche aus einem Balken vom Querschnitt 31 besteht, worin 16 zehnzähnige Zahnräder 32 drehbar gelagert sind. Der Balken kann vermittels einer Parallelführung und einer von der Kurbelachse a angetriebenen Kurvenscheibe gehoben und gesenkt werden. Sobald Kurbel a ans der Ruhelage gebracht wird, hebt sich Kuppelung 31, so daß das Zahnrad 32 mit den Zahnrädern 30 und 33 in Eingriff gebracht wird und so Rad 33 an den Bewegungen des Rades 30 teilnehmen muß, mit anderen Worten, Achse 1 mit Zahnrad 33 des Schaltwerkes II wird um ebensoviel Zähne und in demselben Drehungssinne gedreht werden, wie Zahnrad 20 mit Ziffernrolle 19. Nach Vollendung der Drehung der Kurbel a senkt sich Kuppelung 31 und Zahnrad 32 ist wieder außer Eingriff mit den Rädern 30 und 33. Nachdem nun in dem Schaltwerk der Maschine II derselbe Wert enthalten ist, wie im Zählwerk I, wiederholt sich bei einer Drehung der Kurbel b der soeben beschriebene Vorgang in Maschine II, d. h. der im Schaltwerk II befindliche Wert wird durch die Kurbeldrehung nach Zählwerk II und auch zugleich nach dem zum Druckwerk gehörigen Schaltwerk übertragen.

Zur Übertragung des im Zählwerk II befindlichen Wertes nach dem Druckwerk dient eine gleiche Kuppelung, wie zur Übertragung von Zählwerk I nach Schaltwerk II. Auf der in den Wänden 40 und 41 drehbar gelagerten Achse 34 (siehe Fig. 8 und 9) sind befestigt ein Zahnrad 35, eine Büchse mit Nase 36 und ein Zahnrad 37. Die Zahnräder 37 sind staffelförmig versetzt, so daß je ein Rad über einer der unter den Achsen 34 gelagerten 16 Zahnstangen 39 liegt. Die Zahnstangen sind, in ihrer Längsrichtung verschiebbar, in den heb- und senkbaren Lagern 38 gebettet. Sind die Lager 38 gesenkt, so lassen sich die Achsen 34 frei drehen, in gehobenem Zustande jedoch kämmen die Zahnstangen 39 mit den Rädern 37, so daß bei einer Drehung derselben die Zahnstangen sich in ihrer Längsrichtung verschieben. Zugleich mit den Lagern 38 heb- und senkbar ist noch eine Schiene 42, welche unter den auf Achsen 34 befestigten Nasen 36 liegt. Diese Schiene besitzt 16 Nasen, welche für die Nasen 36 einen Anschlag bilden, wenn die Schiene gehoben ist.

Ein Bock 43 (siehe Fig. 8) erhält durch Pleuelstange 45 und den an der Kurvenscheibe 46, welche durch die Kurbelachse a betätigt wird, befestigten Kurbelzapfen 47 eine hin- und hergehende Bewegung bei Drehung der Kurbel a. Die Länge der Bewegung entspricht zehn Zähnen der Zahnstangen 39, wovon $\frac{9}{10}$ zur Verschiebung der Typenstangen von 0—9 erforderlich sind, $\frac{1}{10}$ hingegen zur Betätigung der zum Abdrucken nötigen Mechanismen verwendet wird. Die Zahnstangen 39 haben senkrechte Arme 49, an welchen außer den mit den Drucktypen versehenen Stangen 51 die Spiralfedern 50 befestigt sind, welche dafür sorgen, daß die Zahnstangen 39 stets unter Zug nach links stehen, also, falls kein anderer Widerstand geboten, immer mit den Nasen 48 an dem Bock 43 anliegen und auch der Bewegung des Bockes nach links folgen müssen.

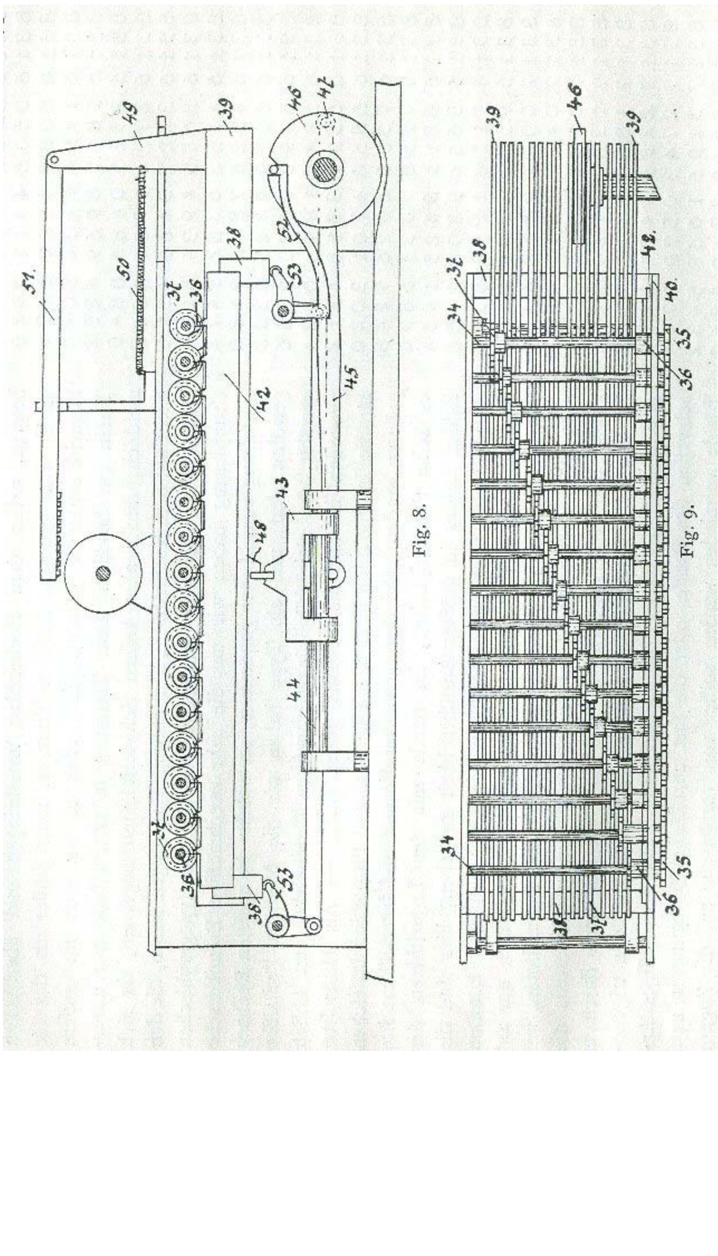


Fig. 8.

Fig. 9.

Der Vorgang beim Drucken ist folgender: Zeigen die Ziffernrollen des Zählwerkes II sämtlich »Null«, so nehmen die Achsen 34 mit den Nasen 36 die in Fig. 8 gezeichnete Stellung ein. Beim Andrehen der Kurbel a heben sich sämtliche Zahnstangen 39 und auch Schiene 42, und zwar durch den von der Kurvenscheibe 46 beeinflußten Hebel 52 und die Daumen 53. Durch das Heben kommen die Zahnstangen 39 mit den Rädern 37 in Eingriff, und die Nasen der Schiene 42 liegen an den Nasen 36 an. Zugleich erhält auch der Bock 43 seine Bewegung und haben nun die Zahnstangen 39 durch die Spiralfedern 50 das Bestreben, der Bewegung des Bockes zu folgen. Dies ist jedoch durch Anliegen der Nasen 36 an den Nasen der Schiene 42 verhindert und werden in diesem Falle lauter Nullen zum Abdruck kommen. Wird jedoch im Zählwerk II an irgend einer Stelle ein Wert eingestellt, z. B. eine Sieben, so wird auch die zu dieser Stelle gehörige Achse 34 mit der darauf befestigten Nase 36 und dem Zahnrad 37 um ebensoviel Einheiten gedreht worden sein, und zwar in der Richtung des Uhrzeigers, wie der eingestellte Wert enthält. Bei einer Drehung der Kurbel a kann die zur betreffenden Stelle gehörige Zahnstange 39 der Bewegung des Bockes 43 so lange folgen, bis die Nase 36 an der Nase der Schiene 42 anliegt, also um sieben Einheiten. Da nun der Abstand von Type zu Type auf den Typenstangen einer Einheit entspricht, so wird an der betreffenden Stelle auch eine Sieben zum Abdruck kommen. Während der zweiten Hälfte der Umdrehung der Kurbel a gehen Bock 43 und dadurch auch Zahnstange 39 in ihre ursprüngliche Lage zurück. Zugleich wurden auch Papier- und Farbband-Transport betätigt.

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß sämtliche Zahnräder usw. durch einspringende Hebel fixiert werden, damit die richtige Stellung der ersteren immer gewährleistet ist. Auch besitzt die Maschine noch eine Anzahl von Sicherungsvorrichtungen. Z. B. kann Kurbel b nicht gedreht werden, sobald Kurbel a aus der Ruhelage gebracht ist und umgekehrt, ferner können die Ziffernrollen der Zählwerke wohl von 0 auf 1, 2, 3 bis 9 und zurück, nie aber, zur Vermeidung einer Zehnerübertragungsvorbereitung, direkt von 9 auf 0 oder umgekehrt gedreht werden.

Fig. 10 zeigt in $\frac{2}{3}$ der natürlichen Größe die treue Kopie eines von der Maschine gerechneten und gedruckten Streifens, dessen Herstellung einschließlich der Einstellung der Anfangswerte etwa 5 Minuten in Anspruch nimmt.

4. Die Zusammenfassung des gewonnenen Zahlenmaterials in Tafeln, die dem Benutzer bequeme Rechnung und rasches Auffinden gestatten, haben wir neben der Sicherung der achten Dezimale als unsere Hauptaufgabe betrachtet. Jetzt, wo das Werk vorliegt und wenigstens nach unserer Meinung das überhaupt Erreichbare darstellt, wird es sich erübrigen, auf alle die vielen Projekte einzugehen, die wir durchprobiert und dem Urteil erfahrener Rechner unterworfen haben, einige allgemeine Bemerkungen über die gewählte Einrichtung dürften aber doch am Platze sein.

Die Bequemlichkeit einer Tafel größeren Umfanges hängt vom Format, von der typographischen Gruppierung des Zahlen materials und von den gebotenen Hilfsmitteln für eine rasche Interpolation ab. Was das Format anlangt, so mußten wir natürlich , um unhandlich dicke oder mehr als zwei Bände zu vermeiden, zum größtmöglichen greifen, das der Rechner noch eben bequem neben dem Rechenblatt unterbringen und überblicken kann. Das gewählte Lexikon-Oktav ist zwar größer als das für Logarithmentafeln gebräuchliche, aber es hat sich für andereTafeln gut bewährt.Eine Trennung in zwei Bande war unvermeidlich, dürfte aber keinen Schwierigkeiten begegnen, da sich leicht auf dem Rechentische Einrichtungen anbringen lassen, die den gleichzeitigen Gebrauch ermöglichen. — Bei der typographischen Gruppierung haben wir uns die sehr zweckmäßige Bremikersche Einteilung zum Muster genommen, an welche die meisten Rechner gewöhnt sind, und als Type haben wir die Mediävallog tang

34	9	36

8316	0055	2725	0000
8316	0508	4312	2928
8316	0961	5882	1276
8316	1414	7434	5044
8316	1867	8969	4232
8316	2321	0486	8840
8316	2774	1986	8868
8316	3227	3469	4316
8316	3680	4934	5184
8316	4133	6382	1472
8316	4586	7812	3180
8316	5039	9225	0308
8316	5493	0620	2856
8316	5946	1998	0824
8316	6399	3358	4212
8316	6852	4701	3020
8316	7305	6026	7248
8316	7758	7334	6896
8316	8211	8625	1964
8316	8664	9898	2452
8316	9118	1153	8360
8316	9571	2391	9688
8317	0024	3612	6436
8317	0477	4815	8604
8317	0930	6001	6192
8317	1383	7169	9200
8317	1836	8320	7628
8317	2289	9454	1476
8317	2743	0570	0744
8317	3196	1668	5432
8317	3649	2749	5540
8317	4102	3813	1068
8317	4555	4859	2016
8317	5008	5887	8384
8317	5461	6899	0172
8317	5914	7892	7380
8317	6367	8869	0008

Fig. 10. $\frac{3}{4}$ der nat. Größe.

Petitziffer gewählt, die gleichfalls für die meisten Tafelwerke jetzt üblich geworden ist und als bewährt gelten kann. — Als Hilfsmittel für die Interpolation können Differenzen und Proportionaltäfelchen geboten werden. Bei dem gewählten Format und Intervall machte es keine Schwierigkeiten, im Bande mit den Logarithmen der Zahlen beides in größter Ausführlichkeit zu geben; hier sind die dreistelligen Differenzen weitaus in der Mehrheit und konnten durchweg mit P. P. versehen werden, vierstellige kommen nur auf 45 Seiten vor, wovon nur 17 nicht hinreichend Raum boten, um alle P. P. aufzunehmen;es ist aber auf diesen mindestens die Hälfte der P. P. gegeben, so daß ihr Gebrauch noch durchaus bequem ist. Wesentlich anders liegt die Sache bei den trigonometrischen Funktionen; hier mußte, wenn ein übermäßiges Anschwellen des Bandes oder die fast unzulässige Zerlegung in zwei Bände vermieden werden sollte, von vornherein auf die Zugabe von P. P. verzichtet werden. Wir sind der Meinung, daß bei vierstelligen, ja sogar noch bei dreistelligen Differenzen der Gebrauch einer ausführlichen Multiplikationstafel (Crelle, Peters, Zimmermann, Petrick), des Rechenschiebers oder einer vierstelligen Logarithmentafel in Plakatform wesentlich bequemer ist, als die Benutzung der üblichen kleinen P. P.-Täfelchen und haben daher in ihrer Weglassung keinen Nachteil erblickt. Dagegen mußte unbedingt dem Rechner die Möglichkeit einer bequemen und sicheren Bildung der Differenzen geboten werden. Da ihre direkte Angabe von vornherein unmöglich war, sind wir zu der gewählten Anordnung gezwungen worden, bei der die aufeinanderfolgenden Funktionswerte untereinander stehen, die Bildung der Differenz also am meisten erleichtert wird; am Kopf und Fuß der Seiten haben wir zudem von 3°0' an die jeweils ersten und letzten Differenzen der betreffenden Kolumnen angeben können, so daß durch auf diese und auf die beiden letzten Dezimalstellen der Funktionswerte der Rechner die Differenz sicher erhält und vor groben Versehen bewahrt bleibt. Für die kleinen Winkel bis 1°12' sind die Differenzen fünfstellig, und bis etwa 2°0' sind die zweiten Differenzen merklich; hier ist also eine bequeme Differenzenbildung und Interpolation bei dem gewählten Intervall von 1", unter das doch kaum herabzugehen war, ausgeschlossen; wir haben auf die direkte Überwindung dieser Schwierigkeit verzichtet und sind der Meinung, daß bei achtstelligen Rechnungen die Bildung der trigonometrischen Funktionen kleiner Winkel bis mindestens 2°0', aber auch noch darüber hinaus bis 5°0' am bequemsten mittels der Hilfsgrößen S und T bewerkstelligt wird. Aus diesem Grunde geben wir diese Größen in einer Ausführlichkeit, wie sie bisher noch nirgends geboten worden ist und in einer Anordnung, die den beiden Aufgaben, Entnahme der Funktion und Aufsuchung des Winkels, gleich gerecht wird. Bis 2° 46' 40" geben wir sie doppelt, sowohl im ersten wie im zweiten Bande, so daß bis zur genannten Grenze der erste Band auch für sich allein die bequemste Entnahme der trigonometrischen Funktionen sinus und tangens gestattet; durch Hinzunahme von sinus und tangens im ersten Bande ist auch die umgekehrte Aufgabe allein durch Benutzung des ersten Bandes ermöglicht. Von da ab sind zur Entnahme einer Funktion oder eines Winkels allerdings beide Bände nötig, wir halten dies aber für das geringere Übel gegenüber einer umständlichen Interpolation. — Von 5°0' ab kommen vierstellige Differenzen nur mehr bis 12°27' und dann dreistellige im ganzen übrigen Teil der Tafel vor; diese kann man durch einen Blick auf Kopf und Fuß der Kolumne und auf die letzte Dezimale der aufeinanderfolgenden Funktionswerte sicher bilden; der Gebrauch ist also nicht unbequemer als der einer siebenstelligen Tafel mit 10" Intervall, wenn man sich eines der obengenannten Hilfsmittel bereitlegt.

Die Rücksicht auf den verfügbaren Raum macht bei allen Tafeln größeren Umfanges ein Abspalten der Kennziffer und der ersten Dezimalstellen zur gebieterischen Notwendigkeit. Im ersten Bande machte dies keine Schwierigkeiten, da wir uns hier unmittelbar an die dem Rechner von den siebenstelligen Tafeln her geläufige Einrichtung der Abspaltung der drei ersten Dezimalen und der Sterne bei der Änderung der dritten Dezimale anschließen konnten; dagegen war bei der im zweiten Bande gewählten Anordnung die Art, wie die Stellen angezeigt werden, an denen die letzte abgespaltene Ziffer um eine Einheit sich ändert, Gegenstand langer Überlegung. Wir haben schließlich einen Stern gewählt, der so angebracht ist, daß er beim Gleiten des Auges über die Kolumne unmöglich übersehen werden kann: alle Zahlengruppen über dem Stern sind mit der oben im Kopf der Seite stehenden durch fetten Druck hervorgehobenen abgespaltenen Zifferngruppe zu verbinden, alle Zahlengruppen unter dem Stern mit der am Fuß der Seite stehenden, und zwar gilt dies, ob das Argument oben und links oder unten und rechts steht. Es hätten sich noch andere Möglichkeiten geboten, über die Schwierigkeit hinwegzukommen, aber diese waren nicht vereinbar mit dem von uns von Anfang an aufgestellten Grundsatz, den wohl alle Rechner billigen werden, daß die vier Funktionen sin, tang, cotg, cos in dieser Reihenfolge direkt nebeneinander stehen sollten, da sie meist zusammen gebraucht werden. Die Rücksicht auf die deutliche Sichtbarkeit des Sternes in der ganzen Kolumne hat uns auch verhindert, weitere Einteilungen durch stärkere Striche der 61 untereinander stehenden Zifferngruppen etwa von 20 zu 20, oder bei der Sekunde 30 vorzunehmen, wie sie wohl sonst wünschenswert gewesen wären.

Die Einteilung der acht Dezimalstellen in zwei Gruppen, die der Rechner vornehmen muß, da er nicht acht Ziffern auf einmal im Kopf behalten kann, haben wir durch beide Bände konsequent in der Weise vorgenommen, daß der ersten Gruppe drei, der zweiten fünf Ziffern angehören. Wiewohl auf den ersten Blick die Einteilung in zwei gleich große Gruppen natürlicher erscheint, ist doch die von uns gewählte weitaus vorzuziehen. Nicht nur weil zur ersten Gruppe noch die Kennziffer hinzukommt, oder weil der Rechner von der siebenstelligen Tafel her an die Abtrennung der drei ersten Ziffern gewöhnt ist, sondern weil bei dem gewählten Intervall die ersten drei Ziffern immer sofort hingeschrieben werden können, die Interpolationsrechnung sich aber höchstens auf die letzten fünf Ziffern erstrecken kann, und mit Rücksicht auf die vorhin besprochene Abspaltung der ersten Dezimalen ist die 3-5 Teilung die natürlichste, die zweckmäßig auch beim Niederschreiben der entnommenen Zahlen eingehalten wird.

5. Um einen korrekten Abdruck der Tafeln zu erzielen, haben wir folgende Maßnahmen getroffen. Aus den durch die Maschine direkt geschriebenen und sorgfältig kontrollierten bzw. wegen der dritten Differenzen korrigierten Streifen, deren jeder für die Zahlen 50, für die trigonometrischen Funktionen 36 Werte auf 16 Dezimalen enthielt, wurde ein in der Hauptsache für den Setzer bestimmtes Manuskript, auf acht Dezimalen abgerundet, in der Anordnung hergestellt, die im Druck befolgt werden sollte. Eine erste Korrektur wurde teils nach diesem Ma-

nuskript, teils auch schon nach der Originalrechnung von dem technischen Hilfsarbeiter an der Normaleichungskommission, Herrn Kreuter gelesen und von da ab das Manuskript völlig ausgeschaltet. Die korrigierten Bogen verglich Herr Dr. Neugebauer Zahl für Zahl mit den Originalrechnungen; hierauf wurde der Satz stereotypiert und nun nach den Plattenabzügen die letzten und peinlichsten Korrekturen gelesen, in die sich die Verfasser und Herr Dr. Paetsch teilten; es wurden sämtliche Köpfe und alles Beiwerk nochmals revidiert, das Zahlenmaterial selbst durch strenge Differenzenbildung geprüft und die achte Dezimale nochmals mit der Originalrechnung verglichen. Es verdient hervorgehoben zu werden, daß bei dieser letzten Korrektur nur mehr verschwindend wenige Fehler aufgefunden wurden (durchschnittlich auf je 80 Seiten einer); woraus die Sorgfalt, mit der die beiden ersten Korrekturen gelesen wurden, erhellt. Hierin liegt auch die Garantie, daß die Tafeln so korrekt sind, als Menschenwerk hergestellt werden kann. Es sind als Korrektoren nur wissenschaftlich gebildete Herren herangezogen worden, die sich der vollen Verantwortung ihrer Aufgabe bewußt waren, so daß die Rechner den Tafeln volles Vertrauen entgegenbringen können.

Während der Korrektur wurden auch zahlreiche Vergleichungen mit anderen Tafeln vorgenommen, so mit den Bruhnsschen siebenstelligen Tafeln, mit dem Vegaschen Thesaurus, der französischen achtstelligen Tafel u. a.

Folgende Fehler sind dabei aufgefunden worden: in der Table de Service géographique de l'armée der bereits oben angezeigte,

in der Bruhnsschen siebenstelligen Tafel:

log tang $3^\circ 3' 59''$ lies 8.7289195 statt 8.728919$\overline{5}$
cotg 3 3 59 » 1.271080$\overline{5}$ « 8.2710805

im sechsstelligen Bremiker

log tang $3^\circ 3' 59''$ lies 8.728920 statt 8.728919

im Vegaschen Thesaurus:

log cotg $9^\circ\ 5'\ 50''$ lies 10.7955426908 statt 10.7955427008
log sin 12 33 40 » 9.3374209182 » 9.3374109182.

in Callet, Tables portatives de logarithmes

log 965 lies 2.98452 73133 43792 56538
statt 58538
log 1022 lies 3.00945 08957 98693 92700
statt 90700.

Es wird ferner hier am Platze sein, die in den zugrunde gelegten Quellenwerken aufgefundenen Fehler zusammenzustellen. Die berichtigten Ziffern sind fettgedruckt.

Briggs, Arithmetica logarithmica:

log	80	lies	1.90308 99869 9194	
»	1239	»	3.09307 13063 7606	(auch die Diff. sind falsch)
»	2534	»	3.40380 66105 4742	
»	2547	»	3.40602 89449 6363	
»	2853	»	3.45530 17716 5708	
»	2865	»	3.45712 46263 0340	
»	6957	»	3.84242 20033 5765	
»	7559	»	3.87846 43453 4146	
»	7639	»	3.88303 65100 2767	
»	8006	»	3.90341 55857 6908	
»	8007	»	3.90346 98285 0717	
»	8008	»	3.90352 40644 7126	
»	8009	»	3.90357 82936 6305	

log	8077	lies	3.90725	00828	8133
»	9972	»	3.99878	22698	3173
»	9973	»	3.99882	58190	4028
»	10033	»	4.00143	08122	4640
»	10061	»	4.00264	11490	0004
»	11081	»	4. . . .		
»	11440	»	4.05842	60244	5700
»	12734	»	4.10496	48455	2783
»	14486	»	4.16094	84808	6470
»	14786	»	4.16985	07018	6149
»	15251	»	4.18329	83210	7581
»	16594	»	4.21995	10857	5532
»	17254	»	4.23688	97937	0186
»	17351	»	4.23932	45097	8780
»	17509	»	4.24326	13427	2058
»	17621	»	4.24603	05511	9059
»	17941	»	4.25384	66461	9851

Gellibrand, Trigonometria britannica

log sin	1°00	lies	8.24185	53184	2289
log cos	1.79	»	9.99978	80244	4918
log cos	2.90	»	9.99944	34674	5598
tang	19.29	»	0.34999	90945	
log sin	25.66	»	9.63651	78932	5594
log sin	29.92	»	9.69791	80108	3454
log cos	25.99	»	9.95369	71482	4867

Es darf hier nicht unterlassen werden, die Sorgfalt hervorzuheben, mit der die Verlagsbuchhandlung sich des schwierigen Druckes annahm; die gleiche Anerkennung verdient die Leistungsfähigkeit der Druckerei, die den Druck in verhältnismäßig sehr kurzer Zeit zu bewältigen vermochte.

6. Während der Vorbereitungen und der Bearbeitung der Tafeln haben wir uns des Rates und der Unterstützung zahlreicher Herren zu erfreuen gehabt, denen an dieser Stelle öffentlicher Dank ausgesprochen werden muß. Es ist dies vor allem Herr Professor H. Bruns, der dem Unternehmen von Anfang an ein lebhaftes Interesse entgegenbrachte und es andauernd mit seinem Rat und seiner wissenschaftlichen und technischen Erfahrung unterstützte; die Tafel verdankt ihm mehr als hier in allen Einzelheiten auseinandergesetzt werden kann. Weiter schulden wir tiefsten Dank der Berliner und Wiener Akademie und insbesondere den Herren Prof. A. Auwers und E. Weiß, die, getragen von der Einsicht in die Bedürfnisse der Wissenschaft, ihre Autorität dafür einsetzten, daß das Unternehmen durch Gewährung der notwendigen Mittel ermöglicht wurde. Mit manchem wertvollen Rat haben uns unterstützt die Herren Prof. Albrecht, Prof. E. Becker und Dr. Witt. Herr Dr. Witt hat auch durch die oben erwähnte Mithilfe bei der Kontrolle und Herr Prof. E. Becker für Darleihung der Bruhnsschen Originalrechnungen Anspruch auf unseren wärmsten Dank.

Unsere Mitarbeiter bei der Berechnung, Kontrolle und Herausgabe der Tafeln, die Herren

Dr. Clemens, Dr. Paetsch, Dr. Neugebauer, Kreuter, Eckert, Kligge, Martens, Dr. Prager und Hildner haben durch ihre treue und unverdrossene Arbeit, die sie jahrelang dem Werk gewidmet haben, Anspruch auf öffentliche Anerkennung ihrer Leistungen, wenn diese auch im einzelnen nicht aufgeführt werden können.

Den Anteil der beiden auf dem Titel genannten Verfasser an der Bearbeitung im einzelnen zu spezialisieren, wollen wir ebenfalls unterlassen und begnügen uns mit der für die Allgemeinheit allein wichtigen Versicherung, daß wir die Verantwortung für jede Zahl und für jede Einrichtung gemeinsam tragen, wie sie aus gemeinsamen Beratungen hervorgegangen sind.

Gebrauch der Tafeln.

Auf die übliche Anweisung zum Gebrauch der Logarithmen überhaupt können wir hier verzichten, da kein der Logarithmen Unkundiger zu achtstelligen Tafeln greifen wird; einige Bemerkungen über die besonderen Einrichtungen unserer Tafel und deren zweckmäßigsten Gebrauch seien für die rasche Orientierung des Rechners jedoch hier zusammengestellt.

Der **erste Band** ist eingerichtet wie die siebenstelligen Tafeln, nur sind, um die großen vierstelligen Differenzen stark in die Minderheit zu bringen, statt der Logarithmen von 1oooo — 20000 jene von 100000—200000 gegeben. Die Differenzen erhält man durch einen Blick auf die mit d überschriebene Kolumne — sie enthält stets die Differenz des auf der gleichen Zeile stehenden letzten Logarithmus zum ersten der folgenden Zeile — und auf die letzte Dezimale; die P. P. sind vollzählig gegeben, mit Ausnahme der Seiten 204—220, die aber mindestens die Hälfte derselben enthalten. Bei vierstelligen Differenzen empfiehlt sich übrigens trotz der vorhandenen P. P. der Gebrauch einer Multiplikationstabelle oder einer vierstelligen Logarithmentafel. — Im unteren Teil jeder Seite findet man links zuerst von 10 zu 10, dann von 100 zu 100 fortschreitend die Verwandlung der betreffenden Anzahl von Sekunden in Grade, Minuten und Sekunden und umgekehrt, da diese Angaben bei astronomischen und geodätischen Rechnungen z. B. bei Auflösung der Keplerschen Gleichung sehr nützlich sind. Daneben stehen in jeweils zehnmal kleinerem Intervalle dieselben Verwandlungen, die zugehörigen Hilfsgrößen S und T und die log sin und log tang der danebenstehenden Winkel. Es ist bekanntlich

$$\log \sin x = \log x'' + S$$
$$\log \operatorname{tang} x = \log x'' + T$$

und entsprechend

$$\log x'' = \log \sin x — S$$
$$\log x'' = \log \operatorname{tang} x — T.$$

Die log sin und log tang sind hinzugefügt, um für die Berechnung kleiner Winkel aus log sin und log tang als Argument für die Entnahme der S und T zu dienen. Die für den Anfang wünschenswerte Ergänzung dieser Angaben wird durch die Tafel auf Seite 364 geboten. Die Sekundenverwandlung größerer Winkel als 27°46'40" wird durch die Tafel auf Seite 367 erleichtert. Da durch die unmittelbar zu entnehmende Differenz S—T auch der log cos — allerdings mit größerer Unsicherheit, die bis auf eine Einheit der achten Dezimale ansteigen kann — der entsprechenden Winkel gegeben ist, ersetzen diese Angaben bis zu Winkeln von 2°46' vollständig die trigonometrische Tafel. Wünscht man von 2000" = 0°33'20" ab eine bequemere Interpolation der S und T, als die Angabe von 10" zu 10" gestattet, so ist zum zweiten Band zu greifen, worin bis 5°0' die S und T für jede Sekunde aufgeführt sind.

Der **zweite Band** gibt die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen in einer Anordnung, die wohl ohne weiteres verständlich ist. Stehen die Grade und Minuten oben, so sind die Sekunden links, stehen sie unten, so sind sie rechts aufzusuchen. Die abgetrennten Ziffern stehen oben und unten und bleiben für alle Werte in den Kolumnen, in denen kein Stern enthalten ist, die gleichen. Sonst sind die Funktionswerte oberhalb des Sternes mit den abgetrennten Ziffern, die oben stehen, zu verbinden und die unterhalb des Sternes mit den unteren. Für die kleinen Winkel bis 5°0' sind die oben erklärten S und T hinzugefügt und empfiehlt sich deren Benutzung mindestens für alle Winkel bis 2°0', bis wohin bei direkter Rechnung die zweiten Differenzen zu berücksichtigen wären, aber auch noch darüber hinaus bis 5°, da die Bildung der Differenz und die Interpolation weniger rasch sich vollziehen als die Aufsuchung des Zahlenlogarithmus im ersten Band. Von 3° an stehen oben und unten die Differenzen der ersten und letzten in der betreffenden Spalte vorkommenden Funktionswerte, so daß ein Blick auf diese und die letzten Dezimalen der Funktionswerte genügt, um die richtige Differenz sicher zu erhalten. Proportionaltäfeichen sind nirgends beigegeben, sondern es wird der Gebrauch einer Multiplikationstafel oder einer vierstelligen Logarithmentafel empfohlen, da diese sicher bei vierstelligen Differenzen schneller zum Ziel führen und bei dreistelligen Differenzen jedenfalls nicht unbequemer sind.

In beiden Bänden wird vorausgesetzt, daß sich der Rechner die acht Dezimalen in zwei Gruppen zu drei und fünf Ziffern zerlege.

2

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	—	00000000	30103000	47712125	60205999	69897000	77815125	84509804	90308999	95424251
1	00000000	04139269	07918125	11394335	14612804	17609126	20411998	23044892	25527251	27875360
2	30103000	32221929	34242268	36172784	38021124	39794001	41497335	43136376	44715803	46239800
3	47712125	49136169	50514998	51851394	53147892	54406804	55630250	56820172	57978360	59106461
4	60205999	61278386	62324929	63346846	64345268	65321251	66275783	67209786	68124124	69019608
5	69897000	70757018	71600334	72427587	73239376	74036269	74818803	75587486	76342799	77085201
6	77815125	78532984	79239169	79934055	80617997	81291336	81954394	82607480	83250891	83884909
7	84509804	85125835	85733250	86332286	86923172	87506126	88081359	88649073	89209460	89762709
8	90308999	90848502	91381385	91907809	92427929	92941893	93449845	93951925	94448267	94939001
9	95424251	95904139	96378783	96848295	97312785	97772361	98227123	98677173	99122608	99563519
10	00000000	00432137	00860017	01283722	01703334	02118930	02530587	02938378	03342376	03742650
11	04139269	04532298	04921802	05307844	05690485	06069784	06445799	06818586	07188201	07554696
12	07918125	08278537	08635983	08990511	09342169	09691001	10037055	10380372	10720997	11058971
13	11394335	11727130	12057393	12385164	12710480	13033377	13353891	13672057	13987909	14301480
14	14612804	14921911	15228834	15533604	15836249	16136800	16435286	16731733	17026172	17318627
15	17609126	17897695	18184359	18469143	18752072	19033170	19312460	19589965	19865709	20139712
16	20411998	20682588	20951501	21218760	21484385	21748394	22010809	22271647	22530928	22788670
17	23044892	23299611	23552845	23804610	24054925	24303805	24551267	24797327	25042000	25285303
18	25527251	25767857	26007139	26245109	26481782	26717173	26951294	27184161	27415785	27646180
19	27875360	28103337	28330123	28555731	28780173	29003461	29225607	29446623	29666519	29885308
20	30103000	30319606	30535137	30749604	30963017	31175386	31386722	31597035	31806333	32014629
21	32221929	32428246	32633586	32837960	33041377	33243846	33445375	33645973	33845649	34044411
22	34242268	34439227	34635297	34830486	35024802	35218252	35410844	35602586	35793485	35983548
23	36172784	36361198	36548798	36735592	36921586	37106786	37291200	37474835	37657696	37839790
24	38021124	38201704	38381537	38560627	38738983	38916608	39093511	39269695	39445168	39619935
25	39794001	39967372	40140054	40312052	40483372	40654018	40823997	40993312	41161971	41329976
26	41497335	41664051	41830129	41995575	42160393	42324587	42488164	42651126	42813479	42975228
27	43136376	43296929	43456890	43616265	43775056	43933269	44090908	44247977	44404480	44560420
28	44715803	44870632	45024911	45178644	45331834	45484486	45636603	45788190	45939249	46089784
29	46239800	46389299	46538285	46686762	46834733	46982202	47129171	47275645	47421626	47567119
30	47712125	47856650	48000694	48144263	48287358	48429984	48572143	48713838	48855072	48995848
31	49136169	49276039	49415459	49554434	49692965	49831055	49968708	50105926	50242712	50379068
32	50514998	50650503	50785587	50920252	51054501	51188336	51321760	51454775	51587384	51719590
33	51851394	51982799	52113808	52244423	52374647	52504481	52633928	52762990	52891670	53019970
34	53147892	53275438	53402611	53529412	53655844	53781910	53907610	54032947	54157924	54282543
35	54406804	54530712	54654266	54777471	54900326	55022835	55145000	55266822	55388303	55509445
36	55630250	55750720	55870857	55990663	56110138	56229286	56348109	56466606	56584782	56702637
37	56820172	56937391	57054294	57170883	57287160	57403127	57518784	57634135	57749180	57863921
38	57978360	58092498	58206336	58319877	58433122	58546073	58658730	58771097	58883173	58994960
39	59106461	59217676	59328607	59439255	59549622	59659710	59769519	59879051	59988307	60097290
40	60205999	60314437	60422605	60530505	60638137	60745502	60852603	60959441	61066016	61172331
41	61278386	61384182	61489722	61595005	61700034	61804810	61909333	62013605	62117628	62221402
42	62324929	62428210	62531245	62634037	62736586	62838893	62940960	63042788	63144377	63245729
43	63346846	63447727	63548375	63648790	63748973	63848926	63948649	64048144	64147411	64246452
44	64345268	64443859	64542227	64640373	64738297	64836001	64933486	65030752	65127801	65224634
45	65321251	65417654	65513843	65609820	65705585	65801140	65896484	65991620	66086548	66181269
46	66275783	66370093	66464198	66558099	66651798	66745295	66838592	66931688	67024585	67117284
47	67209786	67302091	67394200	67486114	67577834	67669361	67760695	67851838	67942790	68033551
48	68124124	68214508	68304704	68394713	68484536	68574174	68663627	68752896	68841982	68930886
49	69019608	69108149	69196510	69284692	69372695	69460520	69548168	69635639	69722934	69810055
50	69897000	69983773	70070372	70156799	70243054	70329138	70415052	70500796	70586371.	70671778
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

x	S	T	log sin x	log tang x
0″ = 0° 0′ 0″	4.685 57487	4.685 57487	—	—
100 = 0 1 40	4.685 57485	4.685 57490	6.685 57485	6.685 57490
200 = 0 3 20	4.685 57480	4.685 57500	6.986 60479	6.986 60500
300 = 0 5 0	4.685 57471	4.685 57517	7.162 69597	7.162 69643
400 = 0 6 40	4.685 57459	4.685 57541	7.287 63459	7.287 63540
500 = 0 8 20	4.685 57444	4.685 57572	7.384 54445	7.384 54572