Zeitschrift für Instrumentenkunde.

Kuratorium:

Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. **F. R. Helmert**, Vorsitzender, Prof. Dr. **A. Raps**, geschäftsführendes Mitglied,
Dr. **H. Krüss**, Prof. Dr. **R. Straubel**.

Redaktion: Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. **St. Lindeck** in Charlottenburg-Berlin.

XXXI. Jahrgang. **April 1911.** Viertes Heft.

Arithmetischer und trigonometrischer Universalrechenapparat nach Hamann.

Von

Ingenieur **K. Hoecken** in Friedenau-Berlin.

Der Erfinder der bekannten Rechenmaschinen „Gauß“ und „Mercedes-Euklid“[1]), Hr. Mechaniker Ch. Hamann in Friedenau-Berlin, hat einen neuen Rechenapparat konstruiert, der für die Ausführung trigonometrischer Rechnungen geeignet ist und außerdem noch eine Reihe anderer Rechenoperationen gestattet, die auf logarithmischem Wege, also z. B. mit dem Rechenschieber, nicht möglich sind, wie z. B. die algebraische Vereinigung von Produkten.

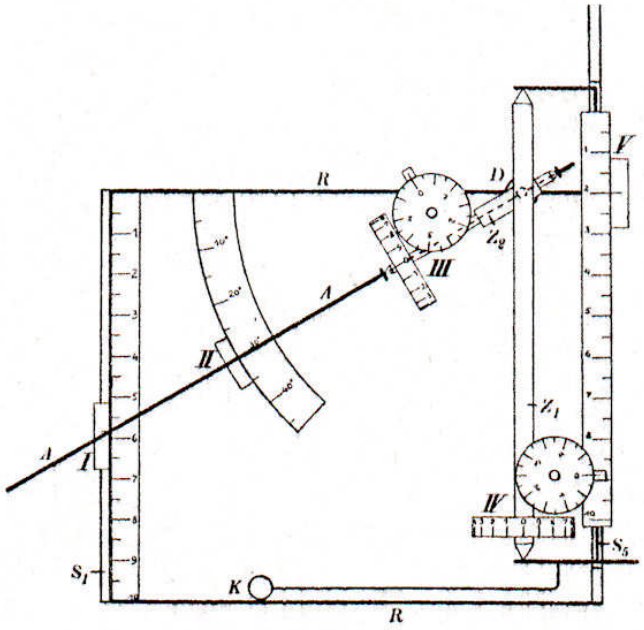

Fig. 1.

Fig. 1 gibt schematisch die Anordnung des Apparates und Fig. 2 eine Gesamtansicht wieder. Auf einem nach vorne geneigten, quadratischen Metallrahmen *RR* von etwa 17 *cm* Seitenlänge befindet sich ein Arm *AA*, welcher bei *D* in einer Büchse drehbar gelagert ist, sodaß derselbe aus seiner Anfangslage, welche mit der oberen Rahmenseite zusammenfällt, nach unten gedreht werden kann, und zwar bis zum Betrage von 45°. Durch einen am Rahmengestell befestigten Gradbogen *II* nebst Nonius kann die Größe des Drehungswinkels ermittelt werden. Auf der linken Rahmenseite ist eine lineare Skale *I* angebracht, deren Nullpunkt mit der Anfangslage des Armes *A* und dem Nullpunkt der Gradteilung zusammenfällt. Der für die Ablesung dieser Teilung vorgesehene Nonius *I* wird einerseits von einer Schlittenführung S_1 im Rahmengestell und andererseits von einer Kurbelschleife im Arm *A* geführt, sodaß er jeder Bewegung des Armes zu folgen vermag und dabei an der Teilung *I* entlang gleitet. Die rechte Rahmenseite enthält ebenfalls eine zur ersteren parallele Schlittenführung S_5,

[1]) Vgl. die Beschreibungen in *dieser Zeitschr.* **26.** *S. 50. 1906;* **29.** *S. 372. 1909* und **30.** *S. 233. 1910.*

in welcher die Skale V sich verschieben kann; ihre Teilung ist mit derjenigen von Skale I kongruent. Dagegen ist der Nonius V' seitlich am Gestell befestigt, sodaß er die Ablesung der jeweiligen Verschiebung der Skale V gestattet. Mit dieser gleichzeitig verschiebbar ist ein Zylinder Z_1, der in zwei Ansätzen des Schlittens S_5 zwischen Spitzen leicht drehbar gelagert ist. In ähnlicher Weise ist auf dem hinteren Ende des drehbaren Armes A ein zweiter Zylinder Z_2 gelagert. Durch einen Druck auf den Knopf K kann nun der den Zylinder Z_1 tragende obere Teil des Schlittens S_5 ein wenig nach links gekippt werden, wodurch der Zylinder Z_1 mit dem darunterliegenden Zylinder Z_2 in Berührung gebracht wird. Die Anordnung ist dabei so getroffen, daß der Berührungspunkt in der Verlängerung der Drehachse des Armes A liegt. Bei Freigabe des Knopfes K wird durch eine entsprechend angebrachte Feder die Verbindung zwischen den beiden Zylindern wieder gelöst. Bei einer Verschiebung des Zylinders Z_1 in achsialer Richtung, während er mit Z_2 in Berührung steht, treten nun Drehungen beider Zylinder um ihre Achsen ein, deren Beträge an den Zählvorrichtungen III und IV, ähnlich wie bei einem Planimeter, abgelesen werden können. Beide Zählvorrichtungen haben eine Einrichtung zur automatischen Löschung bezw. Nullstellung. Ferner sind für die Feineinstellung an den Nonien I und V' Friktionsrollen vorgesehen.

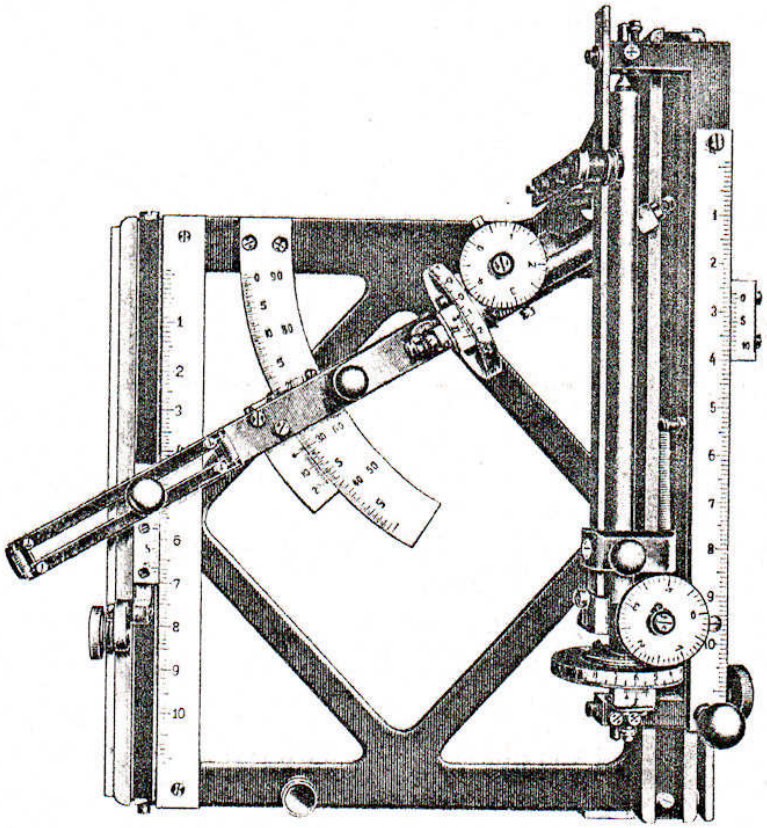

Fig. 2.

Der mathematische Vorgang, welcher sich bei der Benutzung des Apparates abspielt, ist nun der folgende.

In Fig. 3 seien Z_1 und Z_2 die im Punkte P sich berührenden Zylinder, deren Achsen den Winkel $90^0 - \alpha$ miteinander bilden mögen. Durch die Art der beschriebenen Lagerung ist es bedingt, daß die beiden im Punkte P vor Einleitung einer Bewegung zusammenfallenden Oberflächenpunkte der beiden Zylinder sich nach einer ohne gleitende Reibung erfolgenden Bewegung nur in einer Richtung senkrecht zur jeweiligen Zylinderachse auf der Mantelfläche fortbewegt haben werden, also der zu Z_1 gehörige Punkt in der Richtung PA und der zu Z_2 gehörige in der Richtung PB. Denkt man sich also bei Einleitung der Bewegung den Zylinder Z_1 um das Wegeelement ds in der Richtung seiner Achse verschoben, so wird der zu Z_1 gehörende Punkt das Wegeelement dx in der Richtung PA und der zu Z_2 gehörende Punkt das Wegeelement dy in der Richtung PB bei gleichzeitiger Drehung der Zylinder um ihre Achsen zurücklegen, wenn mit x und y die von einem Punkte auf dem Umfange von Z_1 und Z_2 zurückgelegten Wege bezeichnet werden. In diesem Wegedreieck ist

dy Hypotenuse und schließt mit ds den Winkel α ein, wie sich aus der Fig. 3 ergibt. Es bestehen somit folgende Beziehungen:

$$dx = \operatorname{tg}\alpha \cdot ds \qquad dy = \frac{ds}{\cos\alpha},$$

welches die Differentialgleichungen der Wege sind. Da der mit dem Arm A am Nonius II des Instrumentes eingestellte Winkel α als Konstante zu betrachten ist, so ergibt die Integration vorstehender Gleichungen

$$x = s \operatorname{tg}\alpha \qquad y = \frac{s}{\cos\alpha} \quad \text{oder} \quad s = y\cos\alpha,$$

woraus durch Elimination von s noch $x = y \sin\alpha$ sich ergibt. Bezeichnet man nun die Einstellung oder Ablesung an den Nonien I, II, III, IV und V entsprechend mit a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, so bestehen noch folgende Beziehungen, wenn der Abstand der Teilung I vom Drehpunkt D gleich der Einheit gesetzt ist:

$$a_1 = \operatorname{tg}\alpha, \qquad a_2 = \alpha, \qquad a_3 = y, \qquad a_4 = x, \qquad a_5 = s,$$

somit wird

$$a_4 = a_1 a_5 \qquad a_5 = a_3\cos\alpha \qquad a_4 = a_3 \sin\alpha.$$

Es bedeutet dies nun folgendes. Die Ablesung an der Trommel IV ist stets das Produkt der Einstellungen a_1 an der Skale I und a_5 an der Skale V, woraus also erhellt, daß der Apparat sich zur Multiplikation verwenden läßt. Zu diesem Zwecke hat man also nur den einen Faktor links am Nonius I einzustellen, während man den andern Faktor am Nonius V abschiebt, nachdem zuvor durch Niederdrücken des Knopfes K die Walzen in Berührung gebracht wurden.

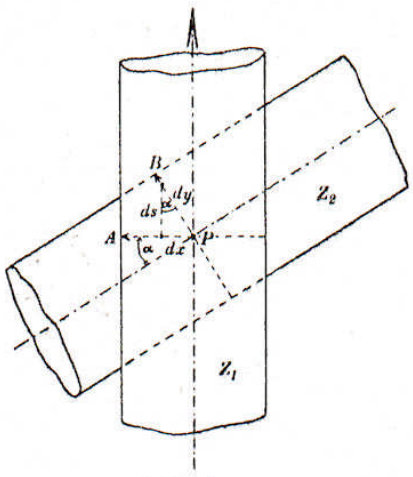

Fig. 3.

Die Division läßt sich selbstverständlich ebenfalls ausführen, indem man den Divisor links an der Skale I einstellt und dann den Schieber S_5 aus seiner Anfangslage bei gekuppelten Walzen so lange nach oben schiebt, bis am Zählwerk IV der Dividend erscheint; dann gibt die Ablesung am Nonius V den gewünschten Quotient an, denn es ist

$$a_5 = \frac{a_4}{a_1}.$$

Dreht man nunmehr den Arm A in seine äußerste untere Lage, die durch einen Anschlag fixiert wird, sodaß $\alpha = 45^0$ wird, dann ist $\operatorname{tg}\alpha = 1$ und somit $a_1 = 1$. In dieser Stellung des Armes A läßt sich nun das Instrument zum Addieren verwenden, denn es wird stets

$$a_4 = a_5;$$

dabei muß man natürlich beim Hinunterfahren des Schlittens S_5 zuvor die Walzen entkuppeln.

Es ergibt sich aus diesem Vorgang ohne weiteres auch, daß das Zählwerk, wenn es nicht jedesmal gelöscht wird, mehrere gebildete Produkte addiert. Wird im entkuppelten Zustande der Walzen ein Wert am Nonius V eingestellt und im gekuppelten Zustande der Schlitten zurückgezogen, so findet eine Subtraktion statt. Die Differenz erscheint am Nonius IV. Hieraus geht auch hervor, daß Differenzen von Produkten gebildet werden können, also allgemein Aufgaben von der häufig auftretenden Form

$$x = ab + cd - ef \ldots$$

Aus den weiteren Gleichungen ist dann ersichtlich, daß ein am Zählwerk *III* eingestellter Wert a_3 sich mit dem sin und cos des bei *II* eingestellten Winkels multipliziert, sodaß also bei *IV* das Produkt $a_3 \sin \alpha$ und bei *V* das Produkt $a_3 \cos \alpha$ durch eine einzige Bewegung des Schiebers erhalten werden kann.

Aus den beiden entwickelten Gleichungen

$$a_5 = a_3 \cos \alpha \qquad a_4 = a_3 \sin \alpha$$

lassen sich noch folgende ableiten:

$$a_3 = a_4 \operatorname{cosec} \alpha \qquad a_3 = a_5 \sec \alpha;$$

ferner durch Division

$$a_4 = a_5 \operatorname{tg} \alpha \quad \text{oder} \quad a_5 = a_4 \operatorname{ctg} \alpha,$$

woraus sich ergibt, daß der Apparat es ermöglicht, die Produkte einer Zahl mit allen sechs trigonometrischen Funktionen zu bilden.

Der Umstand, daß der Gradbogen die Winkelteilung nur bis 45° trägt, bedingt nicht, daß die Einstellung von Winkeln $> 45°$ nicht möglich sei, da infolge der Beziehungen

$$\sin (45° \pm \alpha) = \cos (45° \mp \alpha)$$

bei der Benutzung desselben Gradbogens nur ein Wechsel der Funktionszeichen eintritt. Am Instrument ist diesem Umstande durch verschiedene Farben der Gradziffern und entsprechende Hinweise Rechnung getragen, wodurch selbst die Ermittlung der Vorzeichen sowie das Einstellen des Winkels für alle vier Quadranten keine weitere Gedankenarbeit erfordert, wie dies bei Benutzung trigonometrischer Tafeln stets der Fall ist.

Durch eine an dem Instrument leicht anzubringende Einrichtung läßt es sich dann auch zu Rechnungen gebrauchen, für die die Verwendung der Hyperbelfunktionen zweckmäßig erscheint.

Denkt man sich nämlich die Bewegung des Armes *A* und des Schiebers S_5 zwangläufig miteinander dadurch verbunden, daß an dem Arm *A* ein Kreisbogen vom Radius 1 befestigt ist, über welchen eine Schnur oder feine Gliederkette in einer Rille gelegt ist, während ihr anderes Ende über eine kleine Rolle in der Verlängerung der Schlittenführung S_5 läuft und mit dem Schieber der Skale *V* fest verbunden ist, so wird bei einer Bewegung des Schiebers nach oben der von diesem zurückgelegte Weg sich gleichzeitig auf dem Kreisbogen abwickeln, wodurch der Arm *A* einen entsprechenden Winkel zurücklegt.

Die mathematische Betrachtung dieses Vorganges ergibt dann folgendes.

Die eingangs entwickelten Differentialgleichungen der Wege gelten auch jetzt noch, sodaß wir haben

$$dx = \operatorname{tg} \alpha \cdot ds \qquad dy = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot ds;$$

für die Integration ist aber nunmehr zu berücksichtigen, daß α nicht mehr konstant, sondern von s abhängig ist, und zwar ist, wenn, wie erwähnt, der Radius des Kreisbogens gleich 1 gemacht wird,

$$ds = d\alpha,$$

sodaß

$$dx = \operatorname{tg} \alpha \cdot d\alpha \qquad dy = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot d\alpha$$

wird. Wir erhalten dann für die Wege

$$x = \int_0^{\alpha} \operatorname{tg} \alpha \cdot d\alpha \qquad y = \int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{\cos \alpha},$$

oder

$$x = \ln \cos \alpha \qquad y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right).$$

Der somit am Zählwerk *IV* angegebene Wert $\ln \cos \alpha$ hat wohl keine weitere Bedeutung; dagegen ist die am Zählwerk *III* abzulesende Größe $\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$ der zur Breite α gehörige Meridionalteil einer Kugel vom Radius 1, welcher bei der Konstruktion von Seekarten und beim Segeln in der Loxodrome Verwendung findet. Weit wichtiger ist aber seine Beziehung zu den Hyperbelfunktionen.

Wenn nämlich

$$\psi = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

gesetzt wird, so ist

$$\mathfrak{Sin}\,\psi = \operatorname{tg}\varphi \qquad \mathfrak{Cof}\,\psi = \sec\varphi \qquad \mathfrak{Tg}\,\psi = \sin\varphi \qquad \mathfrak{Cotg}\,\psi = \operatorname{cosec}\varphi,$$

wobei φ der transzendente Winkel heißt.

Um diese Werte zu erhalten, braucht man daher nur bei gekuppelten Walzen den Schieber S_5 so lange nach oben zu schieben, bis am Zählwerk *III* der gegebene Wert ψ erscheint; dann hat sich durch die Vermittlung der Schnur der Arm A auf den transzendenten Winkel φ eingestellt. Ohne die Stellung des Armes A zu verändern, schiebt man jetzt S_5 in seine Null-Lage zurück, löst die Verbindung mit A und schiebt wieder nach oben bei gekuppelten Walzen, bis bei *V* die mit $\mathfrak{Sin}\,\psi$ und $\mathfrak{Cof}\,\psi$ zu multiplizierende Zahl h erscheint.

An den vorher gelöschten Zählwerken *III* und *IV* werden dann die Produkte

$$h \cdot \mathfrak{Cof}\,\psi \quad \text{und} \quad h \cdot \mathfrak{Sin}\,\psi$$

abgelesen. Bei der Berechnung von Seilbahnkurven nach der Gleichung der Kettenlinie würde man hierdurch sogleich die Kurvenordinaten und die Seillängen erhalten.

Auch ohne die Anführung ausführlicher Beispiele wird aus dem vorstehenden die vielseitige Verwendungsmöglichkeit des äußerst sinnreichen und doch so einfachen Apparates zur Genüge hervorgehen, und es braucht wohl kaum darauf hingewiesen zu werden, daß derselbe auch bezüglich seiner mechanischen Ausführung seinem Erfinder alle Ehre macht.

Da auch der Preis ein mäßiger ist, so ist zu erwarten, daß dieses Universalrecheninstrument sich bald auf dem Arbeitstisch des rechnenden Technikers einen dauernden Platz erobern wird.

Friedenau, im Dezember 1910.