Sonderdruck aus Nr. 16, Jahrgang 1937, der Allgemeinen Vermessungs-Nachrichten
Verlag: Herbert Wichmann, Berlin NW 7, Karlstraße 14



# Quadratwurzelziehen mit der Rechenmaschine

Von Vermessungsrat Dr. K. Herrmann, Karlsruhe.

Das Quadratwurzelziehen mit der Rechenmaschine ist in der Vermessungspraxis nicht beliebt. Meistens verwendet man hierzu die besser geeignete Quadrattafel oder, sofern es sich um die Berechnung von Hypotenusen oder Katheten im rechtwinkligen Dreieck handelt, die Pythagorastafel von Dr. Grünert. Es gibt jedoch auch Fälle, bei denen die Maschinenrechnung der Tafelrechnung überlegen ist, so z. B. wenn die Genauigkeit der letzteren nicht ausreicht, oder wenn die Wurzel in einem zusammengesetzten Ausdruck auftritt. Im letzteren Falle ermöglicht die Maschine, insbesondere die Doppelmaschine, vielfach eine gemeinsame Ausführung mehrerer Rechenoperationen, so daß hierbei Zwischennotierungen, die bei der Tafelrechnung unvermeidlich sind, wegfallen.

Wie schon Dr. Kerl[1] erwähnt, sind alle Wurzelverfahren, die auf dem Satze „Die Summe der ersten $n$ ungeraden Zahlen ist gleich $n^2$" beruhen, zu umständlich und zeitraubend und haben sich deshalb nicht in der Rechenpraxis eingebürgert. Besser eignen sich diejenigen Verfahren, die mit einem Näherungswert arbeiten. Da in der Vermessungspraxis im allgemeinen die Genauigkeit von 1 cm genügt, kann das Wurzelziehen durch eine einzige Division erledigt werden, wenn nur ein genügend genauer Näherungswert bekannt ist. Ist ein solcher Näherungswert nicht schon durch ein gemessenes oder dem Plane entnommenes Maß gegeben, so muß er durch Ablesung am Rechenschieber oder durch Schätzung gewonnen werden. Auf die erforderliche Genauigkeit dieses Näherungswertes wird weiter unten noch eingegangen. Im folgenden soll zunächst im Abschnitt I das Wurzelziehen selbst erläutert werden, wie es der Verfasser schon vielfach angewandt hat. Im Abschnitt II folgt dann die Berechnung von zusammengesetzten Ausdrücken, die in Verbindung mit der Quadratwurzel auftreten.

## I. Quadratwurzelziehen.

Das Verfahren stützt sich auf die Gleichung

$$(a + h)^2 = a^2 + 2ah + h^2 \tag{1}$$

Ist der Wert $(a + h)^2$ gegeben, so soll die Wurzel desselben, nämlich $a + h$, berechnet werden. Wenn $a$ einen genügend genauen Näherungswert darstellt, d. h.

[1] Siehe Allgemeine Vermessungs-Nachrichten 1933, S. 58.

wenn $h$ hinreichend klein ist, kann das Glied $h^2$ wegen seiner Geringfügigkeit abgeworfen werden, so daß sich die Gleichung (1) in

$$(a+h)^2 = a^2 + 2ah \tag{2}$$

vereinfacht. Diese Form läßt sich zum Wurzelziehen verwenden. Die praktische Auswertung kann auf zwei Arten erfolgen:

### 1. Erste Art (nach Dr. Kerl)[2].

Man rechnet nach der Formel

$$\frac{(a+h)^2}{a} = a + 2h \tag{3}$$

d. h. man dividiert den gegebenen Wert $(a+h)^2$ durch den Näherungswert $a$. Das hierbei im Umdrehungszählwerk erscheinende Ergebnis dieser Division, nämlich $a+2h$, ist nun noch mit dem im Einstellwerk stehenden Näherungswert $a$ zu mitteln, um den gesuchten Wurzelwert $a+h$ zu erhalten.

Die oben erwähnte Division des gegebenen Wertes $(a+h)^2$ durch den Näherungswert $a$ kann wiederum auf zwei Arten vorgenommen werden:

a) Altes Divisionsverfahren[3]: In das Resultatwerk kommt der gegebene Wert $(a+h)^2$, ins Einstellwerk der Näherungswert $a$; das Umdrehungszählwerk ist gelöscht. Wird nun das Resultatwerk von $(a+h)^2$ bis 0 gekurbelt, so steht im Umdrehungszählwerk $a+2h$.

b) Neues Divisionsverfahren (Division durch Multiplikation): Ins Einstellwerk kommt der Näherungswert $a$; Resultatwerk und Umdrehungszählwerk sind gelöscht. Das Resultatwerk wird nun von 0 bis zum gegebenen Wert $(a+h)^2$ aufgekurbelt, wobei im Umdrehungszählwerk $a+2h$ erscheint.

Ob das alte oder das neue Divisionsverfahren Anwendung finden soll, ist je nach der Art der Aufgabe zu beurteilen. Tritt das Wurzelziehen nicht in Verbindung mit einer anderen Rechnung auf, so ist das Verfahren b) einfacher. Ist jedoch z. B. eine Strecke aus den Koordinaten der Endpunkte zu berechnen, so wird man das Verfahren a) anwenden, weil aus der Quadrierung der Koordinatenunterschiede das Quadrat der Strecke bereits im Resultatwerk steht.

Auf S. 58—59 des Jahrganges 1933 der Allgemeinen Vermessungs-Nachrichten hat Dr. Kerl mehrere Beispiele für diese Art des Wurzelziehens (altes und neues Divisionsverfahren) gerechnet, so daß sich ein weiteres Eingehen hierauf erübrigt. Da jedoch bei dem Kerlschen Verfahren der gesuchte Wurzelwert durch Mittelbildung der beiden im Einstellwerk und Umdrehungszählwerk stehenden Werte gewonnen werden muß, eignet es sich nicht gut für die Berechnung zusammengesetzter Ausdrücke. Hierfür ist die

### 2. zweite Art

vorteilhafter, weil sie den gesuchten Wurzelwert $a+h$ direkt im Umdrehungszählwerk erzeugt, ohne daß es einer Mittelbildung bedarf.

---

[2] Siehe Allgemeine Vermessungs-Nachrichten 1933, S. 58.

[3] Die Bezeichnung „Altes Div.-Verfahren" soll nicht bedeuten, daß es sich um ein veraltetes Verfahren handelt. Auch heute wird dieses Divisionsverfahren noch immer dann angewandt, wenn ein aus einem vorhergehenden Rechengang bereits im Resultatwerk stehender Wert durch eine andere Zahl dividiert werden soll.

Es wird hierbei nach der Gleichung

$$\frac{(a+h)^2 - a^2}{2a} = h \tag{4}$$

gerechnet. Die Auswertung dieser Gleichung kann auch wieder auf doppelte Weise erfolgen:

a) Altes Divisionsverfahren: In das Resultatwerk kommt der gegebene Wert $(a+h)^2$, ins Einstellwerk der Näherungswert $a$; das Umdrehungszählwerk ist leer. Es wird nun um $a$ gekurbelt, so daß sich das Resultatwerk um $a^2$ verändert. Der Drehsinn der Kurbel oder die Hebelschaltung sind jedoch so einzurichten[4], daß das Resultatwerk um $a^2$ abnimmt, d. h. daß darin $(a+h)^2 - a^2$ entsteht, während im Umdrehungszählwerk der Wert $a$ selbst (nicht dessen dekadische Ergänzung) erzeugt wird. Nunmehr kommt ins Einstellwerk der doppelte Näherungswert $2a$, worauf man das Resultatwerk weiter bis 0 kurbelt, ohne vorher das Umdrehungszählwerk zu löschen. Letzteres hat sich hierbei um den Wert $h$ bewegt, der sich zu dem schon darin befindlichen Näherungswert $a$ addiert[5], so daß das Umdrehungszählwerk jetzt die gesuchte Größe $a+h$ anzeigt.

b) Neues Divisionsverfahren (Division durch Multiplikation): Ins Einstellwerk kommt der Näherungswert $a$; Umdrehungszählwerk und Resultatwerk sind leer. Es wird zunächst um $a$ gekurbelt, so daß im Umdrehungszählwerk $a$ und im Resultatwerk $a^2$ erscheint. Nunmehr stellt man $2a$ ins Einstellwerk und kurbelt das Resultatwerk auf den gegebenen Wert $(a+h)^2$ weiter. Das Umdrehungszählwerk hat sich hierbei um $h$ bewegt, welches sich zu dem schon darin befindlichen Näherungswert $a$ hinzufügt, so daß jetzt im Umdrehungszählwerk der gesuchte Wert $a+h$ steht.

### 3. Beispiele.

Zwei Beispiele sollen das unter 2a und 2b beschriebene Verfahren erläutern. Auf das Kerlsche Verfahren 1a und 1b wird hierbei nicht eingegangen.

Beispiel 1 (nach 2a gerechnet):

Aus den Koordinatenunterschieden $\Delta y = 78{,}43$ und $\Delta x = 107{,}89$ zweier Punkte ist die Strecke $s$ zu rechnen (genauer Wert: $s = 133{,}383$).

Da der Wert $s^2 = 17791{,}3170$ aus dem Quadrieren und Addieren der Koordinatenunterschiede im Resultatwerk erscheint, empfiehlt sich das alte Divisionsverfahren nach 2a: Den durch Schätzung gewonnenen Näherungswert 133,00 stellt man ins Einstellwerk und kurbelt um 133,00, jedoch so, daß das Resultatwerk rückwärts läuft, während das Umdrehungszählwerk die tatsächlichen Kurbelumdrehungen (nicht die dekadischen Ergänzungen) anzeigt. Im Resultatwerk steht jetzt 102,3170 ($= 17791{,}3170 - 133^2$), welches nicht abgelesen wird. Ins Einstellwerk kommt jetzt der doppelte Näherungswert 266,00 (Umdrehungszählwerk und Resultatwerk nicht löschen), worauf das Resultatwerk auf 0 (genau 999 999 998,7770) gekurbelt wird. Die gesuchte Strecke $s = 133{,}39$ steht im Umdrehungszählwerk.

---

[4] Je nach Konstruktion der Maschine.

[5] War der Näherungswert $a$ zu groß gewählt, so wird $h$ negativ. Das Umdrehungszählwerk muß also von $a$ bis $a+h$ rückwärts laufen. Dies besorgt die Maschine automatisch, ohne daß es einer Hebelumschaltung bedarf, denn auch das Resultatwerk läuft in diesem Falle von $a^2$ bis $(a+h)^2$ rückwärts.

Beispiel 2: $\sqrt{15\,672{,}4} = 125{,}19$ (genauer Wert = 125,189).

Man rechnet am einfachsten nach dem neuen Divisionsverfahren 2b. Durch Schätzung erhält man: $a = \sqrt{15\,672} = 126$. Ins Einstellwerk kommt der Näherungswert $a = 126{,}00$; Resultatwerk und Umdrehungszählwerk sind leer. Kurbele um $a = 126{,}00$; im Resultatwerk steht dann 15 876,0000 (nicht ablesen). Hierauf stellt man $2a = 252{,}00$ ins Einstellwerk und kurbelt das Resultatwerk auf 15 672,4 (genau 15 671,8800) zurück. Im Umdrehungszählwerk steht jetzt $a + h = 125{,}19$.

### 4. Genauigkeit des errechneten Wurzelwertes.

Die beiden unter 1. und 2. beschriebenen Wurzelverfahren liefern den gesuchten Wurzelwert $a + h$ mit gleicher Genauigkeit[6]. Diese hängt, wie schon erwähnt, lediglich von der Güte des Näherungswertes $a$ ab. Da beim Übergang von der strengen Gleichung (1) zur Näherungsgleichung (2) der Betrag $h^2$ abgeworfen wurde, ist der erhaltene Wurzelwert $a + h$ offenbar um

$$f = \frac{h^2}{2a} \tag{5}$$

fehlerhaft.

Der Näherungswert $a$ kann nun auf zwei Arten gewonnen werden:

a) durch Schätzung: Ein geübter Praktiker wird den Wurzelwert durch Schätzung in Verbindung mit einer ganz flüchtigen Überschlagsrechnung auf etwa 1 % genau ermitteln können[7]. Hiermit erhält man:

$$h = \frac{a}{100} \quad \text{und nach (5):} \quad f = \frac{h^2}{2a} = \frac{a}{20\,000}$$

Daraus folgt: Wird der Näherungswert $a$ durch Schätzung um 1 % fehlerhaft ermittelt, so weist der gerechnete Wurzelwert einen Fehler von $\frac{1}{20\,000}$ seiner Größe auf; d. h. eine Strecke von 200 m weicht um 1 cm, eine Fläche von 1 ha sogar nur um 0,5 qm von dem strengen Werte ab. Es geht hieraus hervor, daß für viele Zwecke eine Schätzung des Näherungswertes genügt. Will man jedoch eine größere Genauigkeit erreichen, so ist dies

b) durch Ablesung des Näherungswertes am Rechenschieber möglich. Die Quadratskala des Rechenschiebers gibt den Näherungswert $a$ auf etwa 0,1 % genau, so daß hieraus

$$h = \frac{a}{1000} \quad \text{und} \quad f = \frac{h^2}{2a} = \frac{a}{2\,000\,000}$$

folgt. Mit anderen Worten: Wird der Näherungswert $a$ durch Ablesung am Rechenschieber um 0,1 % fehlerhaft ermittelt, so weist der gerechnete Wurzelwert einen Fehler von $\frac{1}{2\,000\,000}$ seiner Größe auf; d. h. eine Strecke von 200 m weicht um 0,1 mm, eine Strecke von 2 km um 1 mm und eine Fläche von 1 ha um

---

[6] Es ist hierbei gleichgültig, ob das alte oder das neue Divisionsverfahren Anwendung findet.

[7] Verwendet man hierzu eine kleine Hilfstafel der Quadratzahlen von 1,1 bis 9,9, so läßt sich der Schätzungsfehler innerhalb 0,5 % halten.

0,005 qm vom strengen Werte ab. Dies ist aber eine Genauigkeit, die allen Bedürfnissen der Vermessungspraxis gerecht wird.

Selbstverständlich ließe sich durch Wiederholung des Wurzelziehens mit einem verbesserten Näherungswert eine noch höhere Genauigkeit erreichen, sofern dies in Ausnahmefällen erforderlich sein sollte.

Es ist jederzeit möglich, den Fehler des gerechneten Wurzelwertes abzuschätzen, da der Fehler des Näherungswertes, d. h. die Größe $h$ aus der Kurbelung des Umdrehungszählwerkes von $a$ auf $a + h$, ersichtlich ist. Wird z. B. bei einem Näherungswert $a = 174$ $h = 1{,}6$ erhalten, so ist nach Gleichung (5) der gefundene Wurzelwert um $f = \frac{1{,}6^2}{2 \cdot 174} = 0{,}007$ Einheiten fehlerhaft.

## II. Berechnung zusammengesetzter Ausdrücke.

Das in Abschnitt I, 2 beschriebene Verfahren findet nun auch auf zusammengesetzte Ausdrücke Anwendung. Hierbei sollen die Näherungswerte der Wurzeln teils durch Schätzung, teils mit dem Rechenschieber ermittelt werden, was jeweils vermerkt wird. Es ist noch darauf hinzuweisen, daß alle Beispiele mit der Doppelmaschine ohne jegliche Zwischennotierung lösbar sind[8]. Die Rechnung erfolgt auf der Doppelmaschine „Thales-Geo". Es bietet jedoch keine Schwierigkeiten, die Beispiele auch auf anderen Doppelmaschinen zu rechnen.

Folgende Abkürzungen finden Verwendung:

l. E.-W. = linkes Einstellwerk    l. R.-W. = linkes Resultatwerk
r. E.-W. = rechtes Einstellwerk    r. R.-W. = rechtes Resultatwerk
U.-W. = Umdrehungszählwerk

$$\left.\begin{array}{l}\text{Hebelschaltungen}\\ \text{der „Thales-Geo"}\end{array}\right\}\quad \begin{array}{ll}\text{I, M} = + + & \text{I, D} = - - \\ \text{II, M} = - + & \text{II, D} = + -\end{array}$$

**Beispiel 1:** $\sqrt{653{,}8} + 30{,}45 \cdot \sqrt{179{,}86} - 8{,}24 \cdot \sqrt{749{,}2} = 208{,}41$ (genauer Wert $= 208{,}399$).

Durch Schätzung: $\sqrt{654} = 25{,}7$   $\sqrt{180} = 13{,}3$   $\sqrt{749} = 27{,}2$.

Rechengang: Ins l. E.-W.: $a = 25{,}7000$; ins r. E.-W. 1,0000; Hebel: „I M".

Kurbele um $a = 25{,}7000$, dann ins l. E.-W. $2a = 51{,}4000$, und weiterkurbeln, bis im l. R.-W. 653,8 (bzw. 653,79772000) erscheint. Im U.-W. steht 25,5698, im r. R.-W. 25,56980000 ($= \sqrt{653{,}8}$).

Jetzt l. R.-W. und U.-W. löschen. Ins l. E.-W. $a = 13{,}3000$, ins r. E.-W. 30,4500; Hebel: „I M". Kurbele um 13,3000, dann ins l. E.-W.: $2a = 26{,}6000$ und weiterkurbeln, bis im l. R.-W. 179,86 (bzw. 179,86122000) erscheint. Im U.-W. steht dann 13,4117 ($= \sqrt{179{,}86}$) und im r. R.-W. 433,95606500 ($= \sqrt{653{,}8} + 30{,}45 \cdot \sqrt{179{,}86}$).

Hierauf l. R.-W. und U.-W. löschen. Ins l. E.-W. $a = 27{,}2000$, ins r. E.-W. 8,2400; Hebel: „II D". Kurbele (rückwärts) um 27,2000, dann ins l. E.-W. $2a = 54{,}2000$, und das l. R.-W. auf 749,2 (bzw. 749,20034000) weiterkurbeln. Dann

---

[8] Die einzige Ausnahme bildet das Beispiel 5, bei welchem $s$, $s - a$, $s - b$ und $s - c$ durch Nebenrechnung zu ermitteln sind. Der Dreiecksinhalt aus den drei Seiten kann mit der Doppelmaschine aber auch ohne Zwischennotierung gerechnet werden, wenn die Heronsche Flächenformel entsprechend umgeändert wird. Hierauf soll an anderer Stelle eingegangen werden.

steht im Umdrehungszählwerk 27,3727 ($=\sqrt{749,2}$) und im rechten Resultatwerk 208,40501700 ($=\sqrt{653,8}+30,45\cdot\sqrt{179,86}-8,24\cdot\sqrt{749,2}=$ Gesamtresultat).

Beispiel 2: $\frac{\sqrt{304,72}}{75,46}=0,23133$ (genauer Wert $=0,23133$).

Näherungswert $a=\sqrt{304,7}=17,45$ (Rechenschieber).

Ins l. E.-W.: $a = 17,4500$, ins r. E.-W.: 1,0000; Hebel: „I M".

Kurbele um 17,4500, dann ins l. E.-W.: $2a = 34,9000$ und weiterkurbeln, bis im l. R.-W. 304,72 (bzw. 304,71888000) erscheint. Im U.-W. steht 17,4562 und im r. R.-W. 17,45620000 ($=\sqrt{304,72}$).

Jetzt U.-W. löschen. Ins r. E.-W. kommt 75,46 (Komma umstellen!); rechter Hebel auf „D". Das r. R.-W. wird auf 0 gekurbelt (bzw. 99999,99996274); dann steht im U.-W. 0,231331 $\left(=\frac{\sqrt{304,72}}{75,46}\right)$.

Beispiel 3: $\frac{89,43\cdot\sqrt{783,92}}{75,13}=33,370$ (genauer Wert $=33,370$).

Näherungswert $\sqrt{783}=28,0$ (Rechenschieber).

Ins l. E.-W.: $a = 28,0000$, ins r. E.-W.: 89,4300; Hebel: „I M".

Kurbele um 28,0000; dann ins l. E.-W. $2a = 56,0000$ und weiterkurbeln, bis im l. R.-W. 783,92 (bzw. 783,92080000) erscheint. Im U.-W. steht dann 28,0343 ($=\sqrt{783,92}$) und im r. R.-W. 2507,10744900 ($=89,43\cdot\sqrt{783,92}$). Jetzt ins r. E.-W. 75,1300. rechter Hebel auf „D". Das r. R.-W. auf 0 (bzw. 99999,9968100) kurbeln. Im U.-W. steht dann 33,37003 $\left(=\frac{89,43\cdot\sqrt{783,92}}{75,13}\right)$.

Beispiel 4: $\frac{13,45\cdot\sqrt{7183,6}-69,41\cdot\sqrt{2,09384}}{\sqrt{12,748}}\cdot 2,541=739,93$ (genauer Wert $=739,927$);

Näherungswerte: $\sqrt{7186}=84,7$; $\sqrt{2,09}=1,445$; $\sqrt{12,75}=3,57$ (Rechenschieber).

Rechengang: Ins l. E.-W.: $a = 84,7000$, ins r. E.-W.: 13,4500; Hebel: „I M".

Kurbele um 84,7000, dann ins l. E.-W.: $2a = 169,4000$, und das l. R.-W. auf 7183,6 (bzw. 7183,59226000) weiterkurbeln. Dann steht im U.-W. 84,7679 ($=\sqrt{7183,6}$) und im r. R.-W. 1140,12823500 ($=13,45\cdot\sqrt{7183,6}$).

U.-W. und l. R.-W. löschen. Ins l. E.-W.: $a = 1,4450$, ins r. E.-W.: 69,4100; Hebel: „II D". Kurbele (rückwärts) um 1,4450, dann ins l. E.-W. $2a = 2,8900$ und das l. R.-W. auf 2,09384 (bzw. 2,09380500) weiterkurbeln. Es stehen: im U.-W. 1,4470 ($=\sqrt{2,09384}$), im r. R.-W. 1039,69198500 ($=13,45\cdot\sqrt{7183,6}-69,41\cdot\sqrt{2,09384}$).

U.-W., l. R.-W. und r. E.-W. löschen. Ins l. E.-W.: $a = 3,5700$; Hebel: „I M". Kurbele um 3,5700, hierauf ins l. E.-W.: $2a = 7,1400$ und das l. R.-W. auf 12,748 (bzw. 12,74775600) weiterkurbeln. Im U.-W. steht 3,5704 ($=\sqrt{12,748}$).

Ins r. E.-W. 3,5704, ins l. E.-W. 2,5410, dann U.-W. und l. R.-W. löschen. Hebel: „II D". Das r. R.-W. auf 0 (bzw. 0,00007396) kurbeln. Im l. R.-W. steht 739,93310160 = Gesamtresultat.

**Beispiel 5:** Aus den drei Seiten $a = 75{,}24$ m, $b = 51{,}64$ m, $c = 60{,}02$ m eines Dreiecks ist die Dreiecksfläche zu berechnen. Nach der Flächenformel

erhält man: $$F = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)} \qquad s = \frac{a+b+c}{2}$$

$F = \sqrt{93{,}45 \cdot 18{,}21 \cdot 41{,}81 \cdot 33{,}43} = \sqrt{2\,378\,508{,}0613} = 1542{,}3$ qm (genauer Wert $= 1542{,}3$).

Näherungswert $\sqrt{2\,378\,508} = 1530$ (Schätzung).

Im R.-W. steht als Ergebnis der Multiplikation 2 378 508,0613. Stelle 1530,00 ins E.-W. und kurbele um 1530,00, jedoch so, daß der R.-W.-Wert kleiner wird, während im U.-W. 1530,00 (nicht die dekadische Ergänzung) steht. Jetzt kommt ins E.-W. 3060,00; das R.-W. wird dann auf 0 (bzw. 0,6613) gekurbelt. Im U.-W. erscheint das Resultat = 1542,29.

Die eben gezeigten fünf Beispiele können selbstverständlich auch mit anderer Stellenzahl gerechnet werden. Ebenso können die rechte und die linke Maschine vertauscht werden, nur ist im letzteren Falle auch die Hebelstellung entsprechend zu ändern. Es erübrigt sich wohl, hierauf näher einzugehen.